Devoir Surveillé 07*

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Une étude de fonction).
Soit $f : x \mapsto x \arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Étudier la convexité de f.
4. Étudier les variations de f.
   On pourra remarquer que $f'(0) = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout $t > 0$, $\arctan(t) + \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 4 au voisinage de 1 à droite.
   On pourra poser $x = 1 + h$ avec $h > 0$ et utiliser la question précédente
   (c) En déduire qu'on peut prolonger f en 1 pour que $\mathscr{C}_f$ admette une demi-tangente à droite au point d'abscisse 1 et donner alors les positions de $\mathscr{C}_f$ et de cette demi-tangente.
   (d) Montrer qu'on peut prolonger f en 1 pour que f soit dérivable à gauche en 1 et déterminer alors la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la demi-tangente à gauche au point d'abscisse 1.
6. (a) Déterminer un développement limité de $h : t \mapsto \arctan(1 + t)$ à l'ordre 2 en 0.
   On pourra dériver.
   (b) Déterminer des réels a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} ax + b + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   On pourra remarquer que $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}$.
   (c) Étudier alors les asymptotes à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ et les positions relatives.
7. Tracer $\mathscr{C}_f$ en faisant apparaître tout ce qui a été démontré dans les questions précédentes.

Exercice 2 (Des espaces vectoriels).
On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on note $E_n(a)$ l'ensemble des fonctions f de E telles que :
$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o((x-a)^n)$.

1. Énoncer la formule de Taylor-Young.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soit $f \in E$. En utilisant la formule de Taylor-Young, montrer que :
   $$f \in E_n(a) \iff \forall k \in [\![1, n]\!], f^{(k)}(a) = 0.$$
   (b) Montrer que $E_n(a)$ est un sous-espace vectoriel de E.

3. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$ et soient $a_1, \dots, a_p$ des réels deux à deux distincts. Soient $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}^*$. On pose $m = p - 1 + \sum_{k=1}^{p} n_k$ et

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![0, n_k]\!], P^{(j)}(a_k) = 0\}.$$

   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Montrer que :
$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = Q \times \prod_{k=1}^{p} (X - a_k)^{n_k+1} \right\}.$$

   (c) Prouver que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_m[X]$.
   On pourra considérer la division euclidienne par le polynôme $\prod_{k=1}^{p} (X - a_k)^{n_k+1}$.

   (d) Montrer que :
$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P \in \bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k) \text{ et } \forall k \in [\![1, p]\!], P(a_k) = 0 \right\}.$$

Problème 1 (Interpolation).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. Soit $I = [-1, 1]$ et $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet d'éléments de I deux à deux distincts.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **polynôme d'interpolation** de f relativement aux points $(x_1, \dots, x_n)$ un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(x_i) = f(x_i).$$

L'objet de ce problème est de déterminer les polynômes d'interpolation de f puis de trouver un majorant de $\{|f(x) - P(x)|, x \in I\}$ afin d'estimer l'erreur faite si l'on remplace f par son polynôme d'interpolation. On discutera enfin l'importance du choix des points $(x_1, \dots, x_n)$.

1. Le but de cette première question est de montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme d'interpolation de f relativement aux points $(x_1, \dots, x_n)$ de degré strictement inférieur au nombre n de points. On l'appelle **polynôme d'interpolation de Lagrange** relativement aux points $(x_1, \dots, x_n)$.

   (a) Montrer l'unicité d'un tel polynôme.

   (b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Déterminer un polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :
$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad L_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

   (c) En déduire qu'il existe un polynôme $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad L(x_i) = f(x_i).$$

   (d) Conclure.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme interpolateur de f relativement aux points $(x_1, \dots, x_n)$.

   (a) Montrer que $\prod_{i=1}^{n} (X - x_i) | P - L$.

   (b) En déduire une expression de P en fonction de L.

3. **Dans cette question seulement**, on prend $f : x \mapsto x^3 - 1$, $n \geq 2$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 2\dfrac{i-1}{n-1} - 1$.

(a) Vérifier que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in I$.
(b) Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ de f relativement aux points $(x_1, \dots, x_n)$.
On distinguera les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geq 4$.

4. On suppose dans toute la suite que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. On fixe $x \in I$ distinct des x_i et on définit $g_x : I \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in I, \quad g_x(t) = f(t) - L(t) - (f(x) - L(x)) \prod_{i=1}^{n} \frac{t - x_i}{x - x_i}.$$

(a) Justifier que g_x est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
(b) Montrer que g_x s'annule au moins $n+1$ fois sur I.
(c) En déduire que $g_x^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.
(d) Soit $\mu = \sup\{|f^{(n)}(t)|, \text{ avec } t \in I\}$. Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - L(x)| \leq \frac{\mu}{n!} \prod_{i=1}^{n} |x - x_i|.$$

(e) Déterminer L et μ dans le cas particulier $f : x \mapsto \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$.
Que peut-on en déduire ?

5. Pour obtenir la meilleur approximation possible, on cherche donc un n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ qui rende minimale la quantité $\sup\{\prod_{i=1}^{n} |x - x_i|, \text{ avec } x \in I\}$.

(a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k$.
(c) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T_k est de degré k et de coefficient dominant 2^{k-1}.
On pose $U_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ qui est donc unitaire de degré n et vérifie : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $U_n(\cos(\theta)) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\theta)$.
(d) Justifier que l'ensemble $\left\{\cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right), \text{ avec } i \in [\![1, n]\!]\right\}$ est de cardinal n.
(e) En déduire que U_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et que ses racines sont toutes dans I.
(f) Montrer qu'il existe $y_0, \dots, y_n$ dans I tels que $y_0 < \dots < y_n$ et :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \sup\{|U_n(x)|, \text{ avec } x \in I\} = |U_n(y_i)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(g) Soit P un polynôme unitaire de degré n. On veut montrer que

$$\sup\{|P(x)|, \text{ avec } x \in I\} \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On raisonne pour cela par l'absurde et on suppose que $\sup\{|P(x)|, \text{ avec } x \in I\} < \frac{1}{2^{n-1}}$.

i. Justifier que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $U_n(y_i) - P(y_i)$ est du signe de $(-1)^{n-i}$.
ii. En déduire que $U_n - P$ admet n racines distinctes deux à deux.
iii. En déduire une contradiction.

(h) Quels points $(x_1, \dots, x_n)$ doit-on prendre pour que le polynôme interpolateur de Lagrange de f relativement aux points $(x_1, \dots, x_n)$ fournisse la meilleure approximation de f possible sur I ?

Correction du Devoir Surveillé 07*

Correction de l'exercice 1 :

1. Comme arctan est définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}\setminus\{1\}}$.

2.
   - Comme $\dfrac{x}{x-1} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 1$, $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty}$.
   - $\dfrac{x}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty$ donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\dfrac{\pi}{2}}$.
   - $\dfrac{x}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$ donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} \dfrac{\pi}{2}}$.

3. f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par opérations et : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) + x\frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{1+\frac{x^2}{(x-1)^2}} \\
&= \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{x}{2x^2-2x+1} \\
f''(x) &= -\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{2x^2-2x+1-x(4x-2)}{(2x^2-2x+1)^2} \\
&= -\frac{2x^2-2x+1+2x^2-2x+1-4x^2+2x}{(2x^2-2x+1)^2} \\
&= \frac{2(x-1)}{(2x^2-2x+1)^2}.
\end{aligned}$$

   Donc $f''(x)$ est du signe de $x-1$: $\boxed{f \text{ est convexe sur }]1,+\infty[\text{ et concave sur }]-\infty,1[}$.

4. D'après la question précédente, f' est strictement décroissante sur $]-\infty,1[$. De plus, $f'(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$, $f'(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\dfrac{\pi}{2}-1$. D'après le TBM, f' s'annule une seule fois sur $]-\infty,1[$. Or, $f'(0)=0$.
   Puis, f' est strictement croissante sur $]1,+\infty[$, et $f'(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} \dfrac{\pi}{2}-1>0$, donc f' est strictement positive sur $]1,+\infty[$.
   On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{\pi}{2}$ $\Vert$ $\dfrac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. (a) Soit $g : t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$ dérivable sur $]0,+\infty[$. On a pour tout $t>0$, $g'(t)=0$, donc g est constante sur $]0,+\infty[$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t>0,\ g(t)=g(0)=\dfrac{\pi}{2}}$.

   (b) Prenons $x=1+h$ avec $h>0$: on a $f(1+h)=(1+h)\arctan\left(\dfrac{1+h}{h}\right)=(1+h)\dfrac{\pi}{2}-(1+h)\arctan\left(\dfrac{h}{1+h}\right)$ (car $h>0$).
   Or $\dfrac{h}{1+h} \underset{h\to0}{=} h(1-h+h^2-h^3+o(h^3)) \underset{h\to0}{=} h-h^2+h^3-h^4+o(h^4)$, et $\arctan(u) \underset{u\to0}{=} u-\dfrac{u^3}{3}+o(u^4)$.
   Donc $\arctan\left(\dfrac{h}{1+h}\right) \underset{h\to0}{=} h-h^2+h^3-h^4-\dfrac{(h-h^2+h^3-h^4)^3}{3}+o(h^4) \underset{h\to0}{=} h-h^2+\dfrac{2}{3}h^3+o(h^4)$.
   Ainsi, $f(1+h) \underset{h\to0^+}{=} \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}h-h+h^2-\dfrac{2}{3}h^3-h^2+h^3-\dfrac{2}{3}h^4+o(h^4)$, et $\boxed{f(1+h) \underset{h\to0^+}{=} \dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)h+\dfrac{1}{3}h^3-\dfrac{2}{3}h^4+o(h^4)}$.

   (c) On prolonge f en 1 en posant $f(1)=\dfrac{\pi}{2}$, de sorte que f est continue à droite en 1 et comme f admet un DL à l'ordre 1 à droite en 1, elle est dérivable en 1. De plus, sa demi-tangente en 1 a pour équation $y=\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)(x-1)$. De plus, à droite de 1, on a $h>0$ et $\dfrac{1}{3}h^3>0$, donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de sa demi-tangente}}$.

   (d) On pose $f(1)=-\dfrac{\pi}{2}$, de sorte que f est continue à gauche en 1. De plus, comme $f'(x) \xrightarrow[x\to1^-]{} -\dfrac{\pi}{2}-1$, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable à gauche en 1 avec $f'(1)=-\dfrac{\pi}{2}-1$. Comme f est concave sur $]-\infty,-1[$, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de sa demi-tangente en } 1}$.

6. (a) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, $h'(t)=\dfrac{1}{1+(1+t)^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t+\frac{t^2}{2}} \underset{t\to0}{=} \dfrac{1}{2}(1-t+o(t))$.
   En primitivant (attention à la constante) : $h(t) \underset{t\to0}{=} \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{4}+o(t^2)$.

(b) On calcule : $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to\pm\infty}{=} x\arctan\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{4}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{a=\dfrac{\pi}{4},\ b=\dfrac{1}{2} \text{ et } c=\dfrac{1}{4}}$.

(c) D'après la question précédente, $f(x) - \left(\dfrac{\pi}{4}a + \dfrac{1}{2}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{4x}$, donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y = \dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{1}{2} \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_f \text{ en } \pm\infty}$ et $\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de l'asymptote en } +\infty \text{ et en dessous en } -\infty}$.

7. Voir Geobegra.

Correction de l'exercice 2 :

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur l'intervalle I et soit $a \in I$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$

2. (a) Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, f admet un développement limité à l'ordre n en a : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)$.

Or, $f \in E_n(a) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o\big((x-a)^n\big) \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} = 0$ par unicité du développement limité.

Donc $\boxed{f \in E_n(a) \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ f^{(k)}(a) = 0}$.

(b)
- La fonction nulle $f = 0_E$ est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ et elle vérifie $f(x) \underset{x\to a}{=} 0 + o\big((x-a)^n\big)$, donc $f \in E_n(a)$.
- Soient $f, g \in E_n(a)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o\big((x-a)^n\big)$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} g(a) + o\big((x-a)^n\big)$, donc $(\lambda f + g)(x) \underset{x\to a}{=} (\lambda f + g)(a) + o\big((x-a)^n\big)$.
  Ainsi, $\lambda f + g \in E_n(a)$.

Donc $\boxed{E_n(a) \text{ est un sev de } E}$.

3. (a)
- Soit $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors $\forall k \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![0,n_k]\!],\ P^{(j)}(a_k) = 0$, donc $P \in F$.
- Soient $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $k \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![0,n_k]\!]$: $(\lambda P + Q)^{(j)}(a_k) = \lambda P^{(j)}(a_k) + Q^{(j)}(a_k) = 0$, donc $\lambda P + Q \in F$.

Ainsi $\boxed{F \text{ est un sev de } \mathbb{R}[X]}$.

(b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

- Supposons que $P \in F$. Alors pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, a_k est racine de P de multiplicité au moins $n_k + 1$. Donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}$ divise P et il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q \times \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}$.
- Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q \times \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}$. Alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}$ divise P, donc pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, a_k est racine de P de multiplicité au moins n_k+1, et pour tout $j \in [\![0,n_k]\!]$, $P^{(j)}(a_k) = 0$.

Ainsi, $\boxed{F = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = Q \times \prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}\right\}}$.

(c) Posons $A = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X-a_k)^{n_k+1}$ qui est un polynôme de degré $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(n_k+1) = p + \sum_{k=1}^{p} n_k = m+1$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
- Analyse : soit $P_1 \in F$ et $P_2 \in \mathbb{R}_m[X]$ tels que $P = P_1 + P_2$. Alors il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_1 = QA$, donc $P = QA + P_2$ avec $\deg(P_2) < \deg(A)$. Autrement dit, P_2 est le reste de la division euclidienne de P par A et Q est le quotient.
- Synthèse : soit $P = AQ + R$ la division euclidienne de P par A. On pose $P_1 = AQ$ et $P_2 = R$. On a bien $P_1 \in F$ et $\deg(P_2) < \deg(A) = m+1$, donc $P_2 \in \mathbb{R}_m[X]$.

Ainsi tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ se décompose de façon unique comme la somme d'un polynôme de F et d'un polynôme de $\mathbb{R}_m[X]$: $\boxed{\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_m[X]}$.

(d) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par définition :

$$\begin{aligned} P \in F &\iff \forall k \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![0,n]\!], P^{(j)}(a_k) = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], P^{(j)}(a_k) = 0 \text{ et } \forall k \in [\![1,p]\!], P(a_k) = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![1,p]\!], P \in E_{n_k}(a_k) \text{ et } \forall k \in [\![1,p]\!], P(a_k) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{F = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P \in \bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k) \text{ et } \forall k \in [\![1,p]\!], P(a_k) = 0\right\}}$.

Correction du problème 1 :

1. (a) Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$ et $Q(x_i) = f(x_i)$.
Alors, $\forall x \in [\![1,n]\!]$, $(P-Q)(x_i) = 0$, donc $P-Q$ admet au moins n racines distinctes. Comme $P-Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P-Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $P = Q$.
Ainsi, $\boxed{\text{le polynôme interpolateur de Lagrange est unique}}$.

   (b) Le polynôme $\boxed{L_i = \dfrac{\prod_{\substack{k=i\\k\neq i}}^n (X-x_k)}{\prod_{\substack{k=i\\k\neq i}}^n (x_i-x_k)}}$ convient.

   (c) On pose $\boxed{L = \displaystyle\sum_{j=1}^n f(x_j)L_j}$. On a bien $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $L(x_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^n f(x_j)L_j(x_i) = f(x_i)$.

   (d) On a bien montré $\boxed{\text{l'unicité et l'existence}}$ du polynôme interpolateur de Lagrange de f.

2. (a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(P-L)(x_i) = P(x_i) - L(x_i) = 0$. Donc $x_1,\dots,x_n$ sont n racines distinctes de $P-L$ et $\boxed{\displaystyle\prod_{i=1}^n (X-x_i) | P-L}$.

   (b) Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\boxed{P = L + \displaystyle\prod_{i=1}^n (X-x_i)Q}$.

3. (a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Alors $0 \le i-1 \le n-1$ et $n-1>0$, donc $0 \le \dfrac{i-1}{n-1} \le 1$ et $0 \le 2\dfrac{i-1}{n-1} \le 2$. D'où $\boxed{-1 \le x_i \le 1}$.

   (b)
   - Pour $n=2$, on a $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$, $\boxed{L = -2L_1 = X-1}$.
   - Pour $n=3$, on a $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$, et on remarque que $\boxed{L = X-1}$ vérifie encore $L(x_2) = f(x_2)$, donc c'est le bon polynôme par unicité.
   - Pour $n \ge 4$, $\boxed{L = X^3 - 1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]}$ vérifie $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $L(x_i) = f(x_i)$, donc c'est le polynôme interpolateur de Lagrange par unicité

4. (a) Comme f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et L est un polynôme, $\boxed{g_x \text{ est de classe } \mathscr{C}^n \text{ sur } I}$.

   (b) Soit $j \in [\![1,n]\!]$, $g_x(x_j) = -(f(x) - L(x))\displaystyle\prod_{i=1}^n \frac{x_j - x_i}{x-x_i} = 0$. De plus $g_x(x) = 0$. Donc $\boxed{g_x \text{ s'annule en } x, x_1, \dots, x_n}$.

   (c) Montrons par récurrence sur $k \in [\![0,n]\!]$ que $g_x^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur I.
   - Initialisation : c'est la question précédente.
   - Hérédité : soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Supposons que $g_x^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois en $\alpha_1 < \dots < \alpha_{n+1-k}$ dans I.
   Pour tout $j \in [\![1,n-k]\!]$, la fonction $g^{(k)}$ est de classe $\mathscr{C}^{n-k}$ donc dérivable sur $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ et $g^{(k)}(\alpha_j) = g^{(k)}(\alpha_{j+1}) = 0$. D'après Rolle, il existe $\beta_j \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ tel que $g^{(k+1)}(\beta_j) = 0$.
   Ainsi, on a $n+1-(k+1)$ points $\alpha_1 < \beta_1 < \dots < \beta_{n+1-(k+1)} < \alpha_{n+1-k}$ d'annulation de $g^{(k+1)}$ sur I.

   D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $g^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur I.
   En particulier, $\boxed{g^{(n)} \text{ s'annule au moins 1 fois sur } I}$.

   (d) Comme L est de degré strictement inférieur à n, $L^{(n)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$. De plus, $\displaystyle\prod_{i=1}^n \frac{X-x_i}{x-x_i}$ est de degré n et son coefficient dominant est $\dfrac{1}{\prod_{i=1}^n (x-x_i)}$. Donc sa dérivée n-ième est le polynôme constant $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^n (x-x_i)}$.
   Donc pour tout $t \in I$, $g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - (f(x) - L(x))\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^n (x-x_i)}$. D'après la question précédente, il existe $t \in I$ tel que $g^{(n)}(t) = 0$ et on a alors $f(x) - L(x) = \dfrac{f^{(n)}(t)}{n!}\displaystyle\prod_{i=1}^n (x-x_i)$.
   Or $|f^{(n)}(t)| \le \mu$, donc $\boxed{|f(x) - L(x)| \le \dfrac{\mu}{n!}\displaystyle\prod_{i=1}^n |x-x_i|}$.

   (e) Pour le f donné, on doit avoir : $\forall i \in [\![1,n]\!] L(x_i) = 0$. Donc $L \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ a au moins n racines distinctes, donc $\boxed{L = 0_{\mathbb{R}[X]}}$.
   De plus, pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = n!$, donc $\boxed{\mu = n!}$.
   $\boxed{\text{L'inégalité précédente est donc une égalité}}$: $\forall x \in I$, $|f(x)| = |f(x)|$.

5. (a) D'après la formule de Moivre, on a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \operatorname{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{n-k} \cos(\theta)\, i^k \sin^k(\theta)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta)(-1)^k \sin^{2k}(\theta) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(\theta)(-1)^k (1-\cos^2(\theta))^k
\end{aligned}$$

On pose alors $\boxed{T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k}(X^2-1)^k}$ qui convient.

Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie aussi : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = Q(\cos(\theta))$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = Q(\cos(\theta))$. Or la fonction cos est surjective sur I, donc T_n et Q coïncident sur tout l'intervalle I, en particulier en une infinité de points. Donc $T_n = Q$. Ainsi, $\boxed{T_n \text{ est unique}}$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $2\cos(\theta)\cos((k+1)\theta) = \cos((k+2)\theta) + \cos(k\theta)$, donc $2\cos(\theta)T_{k+1}(\cos(\theta)) = T_{k+2}(\cos(\theta)) + T_k(\cos(\theta))$. Ainsi, les polynômes $2XT_{k+1}$ et $T_{k+2} + T_k$ coïncident en une infinité de points et sont donc égaux. D'où $\boxed{T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k}$.

(c) On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$:

- Pour $k = 1$, $T_1 = X$ est bien de degré 1 et de coefficient dominant $2^{1-1} = 1$.
  Pour $k = 2$, $T_2 = 2X^2 - 1$ est de degré 2 et de coefficient dominant $2^{2-1} = 2$.
- Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que T_k est de degré k et de coefficient dominant 2^{k-1} et que T_{k+1} est de degré $k+1$ et de coefficient dominant 2^k.
  Alors $2XT_{k+1}$ est de degré $k+2$ et de coefficient dominant 2^{k+1}, donc $T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k$ est aussi de degré $k+2$ et de coefficient dominant 2^{k+1}.

D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, T_k \text{ est de degré } k \text{ et de coefficient dominant } 2^{k-1}}$.

(d) Comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{(2i-1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$ et que cos est injective sur $[0, \pi]$, l'ensemble donné a même cardinal que $\left\{\frac{(2i-1)\pi}{2n}, \text{ avec } i \in [\![1, n]\!]\right\}$, c'est-à-dire qu'il est de $\boxed{\text{cardinal } n}$.

(e) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons $\theta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2n}$ et $x_i = \cos(\theta_i)$. D'après la question précédente, $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $U_n(x_i) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\theta_i) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos\left(i\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.
Donc $x_1, \dots, x_n$ sont racines de U_n.
Comme U_n est de degré n et qu'il admet n racines distinctes, il est $\boxed{\text{scindé à racines simples et toutes ses racines sont dans } I}$.

(f) On remarque que pour tout $x \in I$, $|U_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. De plus, $U_n(\cos(\theta)) = \pm\frac{1}{2^{n-1}} \iff n\theta = 0\,[\pi] \iff \exists i \in \mathbb{Z} \mid \theta = i\frac{\pi}{n}$.

Posons $\boxed{\text{pour } i \in [\![0, n]\!],\ y_i = \cos\left((n-i)\frac{\pi}{n}\right)}$. Comme cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, $y_0 < \cdots < y_n$. De plus, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $U_n(y_i) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos((n-i)\pi) = \frac{(-1)^{n-i}}{2^{n-1}}$ et $\boxed{|U_n(y_i)| = \frac{1}{2^{n-1}}}$.

(g) i. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Comme $U_n(y_i) = \frac{(-1)^{n-i}}{2^{n-1}}$ et $|P(y_i)| < \frac{1}{2^{n-1}} = |U_n(y_i)|$,

- si $n - i$ est pair, $U_n(y_i) - P(y_i) = \frac{1}{2^{n-1}} - P(y_i) > 0$;
- si $n - i$ est impair, $U_n(y_i) - P(y_i) = -\frac{1}{2^{n-1}} - P(y_i) < 0$.

Dans les deux cas, $\boxed{U_n(y_i) - P(y_i) \text{ a le signe de } (-1)^{n-i}}$.

ii. Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. La fonction $h : t \mapsto U_n(t) - P(t)$ est continue sur $[y_i, y_{i+1}]$ et $h(y_i)$ et $h(y_{i+1})$ sont de signes contraires. Donc, d'après le TVI, h s'annule sur $]y_i, y_{i+1}[$.
Ainsi, h s'annule au moins n fois sur I et $\boxed{U_n - P \text{ admet au moins } n \text{ racines distinctes deux à deux}}$.

iii. Comme U_n et P sont unitaires de degré n, $U_n - P$ est de degré strictement inférieur à n. Or, il admet au moins n racines. On a donc $U_n - P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $U_n = P$.
Mais $\sup\{|U_n(x)|, \text{ avec } x \in I\} = \frac{1}{2^{n-1}} > \sup\{|P(x)|, \text{ avec } x \in I\}$, ce qui donne une $\boxed{\text{contradiction}}$.

(h) Soit $x_1, \dots, x_n$ des points distincts de I. On pose $P = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ qui est un polynôme unitaire de degré n. D'après la question précédente, $\sup\{\prod_{i=1}^{n}|x - x_i|, \text{ avec } x \in I\} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. Ainsi, on prend $x_1, \dots, x_n$ de sorte que ce sup soit égal à $\frac{1}{2^{n-1}}$. Par exemple, on peut prendre $\boxed{\text{les racines de } U_n}$.