

Contrôle de cours 17 - DL / Espaces vectoriels - Sujet A

Jeudi 20 mars 2025

Question 1 (2 pts)

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

- Donner la définition du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, \dots, u_p)$.

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k, \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \right\}$$

- Donner la définition de $(u_1, \dots, u_p)$ est libre avec des quantificateurs.

$$(u_1, \dots, u_p) \text{ est libre ssi } \forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

- Soit $u \in E : \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \iff u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

□

Question 2 (4 pts)

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$. Montrer que F est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- La matrice nulle $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \in F$ car $AM = MA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.
- Soient $M, N \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $(\lambda M + N)A = \lambda MA + NA = \lambda AM + AN = A(\lambda M + N)$. Donc $\lambda M + N \in F$.

Donc F est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $G = \{y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y'' - 3y' + 2y = 0\}$. Écrire G comme un Vect.

$$G = \{x \mapsto Ae^x + Be^{2x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}).$$

□

Question 3 (3 pts)

Déterminer le $DL_7(0)$ de $f : x \mapsto \cos(\ln(1-x^2))$. On a $u(x) = \ln(1-x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + o(x^7) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2$.

On développe $\cos(u) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + o(x^7)$, et $u^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 + x^6 + o(x^7)$. Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2} + o(x^7)$. □

Contrôle de cours 17 - DL / Espaces vectoriels - Sujet B

Jeudi 20 mars 2025

Question 1 (2 pts)

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

- Donner la définition du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, \dots, u_p)$.

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k, \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \right\}$$

- Donner la définition de $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E avec des quantificateurs.

$$(u_1, \dots, u_p) \text{ est libre ssi } \forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \mid x = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k.$$

- On suppose que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre et $u \in E$. Alors $(u_1, \dots, u_p, u)$ est liée $\iff u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

□

Question 2 (4 pts)

- Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est impaire}\}$. Montrer que F est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- La fonction nulle $f = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est dans F car $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = 0 = -f(x)$.
- Soient $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}, (\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = -\lambda f(x) - g(x) = -(\lambda f + g)(x)$. Donc $\lambda f + g \in F$.

Donc F est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- Soit $G = \{y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y'' + 3y' + 2y = 0\}$. Écrire G comme un Vect.

$$G = \{x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{-2x}).$$

□

Question 3 (3 pts)

Déterminer le $DL_7(0)$ de $f : x \mapsto \ln(1 - \sin(x^2))$.

On a $u(x) = \sin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^7) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$. On développe $\ln(1 - u) \underset{x \rightarrow 0}{=} -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(x^7)$, et

$$u^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 + o(x^7) \text{ et } u^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^6 + o(x^7). \text{ Donc } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x^2 + \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + o(x^7) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^7).$$

□