

## Contrôle de cours 18 - Dénombrement / Dimension - Sujet A

### Jeudi 3 avril 2025

Nom et prénom :

.....

*Durée : 15 minutes.*

*L'usage de la calculatrice est interdit.*

#### Question 1 (0,5 pt)

Quel est le nombre de permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ?

☐

#### Question 2 (0,5 pt)

Soient  $A$  et  $B$  deux parties finies d'un ensemble  $E$ . Alors :  $\text{card } A \cup B =$

☐

#### Question 3 (0,5 pt)

Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Le nombre d'arrangements de  $p$  éléments de  $E$  est :

☐

#### Question 4 (2 pts)

1. Cinq amis vont au restaurant et déposent à l'entrée leur manteau. En sortant, chacun récupère un manteau au hasard.

Combien y a-t-il de façons différentes d'associer à chaque personne un manteau ?

2. Une classe de PCSI comprend 4 filles et 5 garçons. Un groupe de colle est un groupe de 3 élèves. Combien de groupes de colle différents peut-on faire avec au moins une fille ?

#### Question 5 (9 pts)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $F, G$  deux sev de  $E$ .

1. On dit que  $E$  est de dimension finie si :

2. Énoncer le théorème de la base extraite :

3. Énoncer le théorème de la base incomplète :

4. On suppose que  $E$  est de dimension  $n$ .

(a) À quelle condition simple est-ce qu'une famille génératrice  $(u_1, \dots, u_p)$  est une base de  $E$ ?

(b) À quelle condition simple est-ce qu'une famille libre  $(u_1, \dots, u_p)$  est une base de  $E$ ?

5.  $\dim(\mathbb{K}_n[X]) =$

6. Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ ,  $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) =$

7. On dit que  $F$  est un hyperplan de  $E$  si :

8.  $\dim(F + G) =$

9. On suppose que  $E$  est de dimension  $n$  et que  $\dim(F) + \dim(G) = n$ . Alors

$$F \oplus G = E \iff \iff$$

### Question 6 (2 pts)

Soit  $P_1 = X^2 - 1$ ,  $P_2 = X^2 - 2X - 2$ ,  $P_3 = X^2 + 4X + 1$ . Calculer le rang de  $(P_1, P_2, P_3)$ .

**Contrôle de cours 18 - Dénombrement / Dimension - Sujet B**  
**Jeudi 3 avril 2025**

Nom et prénom :

.....

*Durée : 15 minutes.*

*L'usage de la calculatrice est interdit.*

**Question 1 (0,5 pt)**

Soient  $A$  et  $B$  deux parties finies d'un ensemble  $E$ . Alors :  $\text{card } A \cup B =$



**Question 2 (0,5 pt)**

Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Le nombre d'arrangements de  $p$  éléments de  $E$  est :



**Question 3 (0,5 pt)**

Quel est le nombre de permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ?



**Question 4 (2 pts)**

1. On lance trois fois un dé à 6 faces et on note dans l'ordre les résultats obtenus.  
Combien y a-t-il de possibilités pour lesquelles les trois résultats sont différents?
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
2. Un groupe d'amis composé de 3 fumeurs et 7 non fumeurs doivent désigner un groupe de 4 pour participer à une course.  
Combien y a-t-il de groupes différents possibles qui contiennent au moins un fumeur?

**Question 5 (9 pts)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $F, G$  deux sev de  $E$ .

1. On dit que  $E$  est de dimension finie si :
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
2. Énoncer le théorème de la base extraite :
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
3. Énoncer le théorème de la base incomplète :

4. On suppose que  $E$  est de dimension  $n$ .

(a) À quelle condition simple est-ce qu'une famille génératrice  $(u_1, \dots, u_p)$  est une base de  $E$ ?

(b) À quelle condition simple est-ce qu'une famille libre  $(u_1, \dots, u_p)$  est une base de  $E$ ?

5.  $\dim(\mathbb{K}_n[X]) =$

6. Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ ,  $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) =$

7. On dit que  $F$  est un hyperplan de  $E$  si :

8.  $\dim(F + G) =$

9. On suppose que  $E$  est de dimension  $n$  et que  $\dim(F) + \dim(G) = n$ . Alors

$$F \oplus G = E \iff \iff$$

### Question 6 (2 pts)

Soit  $P_1 = X^2 + 1$ ,  $P_2 = X^2 - 2X - 2$ ,  $P_3 = X^2 + 4X + 7$ . Calculer le rang de  $(P_1, P_2, P_3)$ .