Contrôle de cours 18 - Dénombrement / Dimension - Sujet A
Jeudi 3 avril 2025

Question 1 (0,5 pt)

Quel est le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$? $n!$ ☐

Question 2 (0,5 pt)

Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E. Alors :

$$\operatorname{card} A \cup B = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card} A \cap B$$

☐

Question 3 (0,5 pt)

Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre d'arrangements de p éléments de E est : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$. ☐

Question 4 (2 pts)

1. Cinq amis vont au restaurant et déposent à l'entrée leur manteau. En sortant, chacun récupère un manteau au hasard.
   Combien y a-t-il de façons différentes d'associer à chaque personne un manteau ?
   On cherche le nombre de permutations des 5 manteaux : il y en a $5! = 120$.
2. Une classe de PCSI comprend 4 filles et 5 garçons. Un groupe de colle est un groupe de 3 élèves. Combien de groupes de colle différents peut-on faire avec au moins une fille ?
   On cherche le nombre de possibilités en faisant 3 tirages simultanés dans la classe de 9 élèves : il y a $\binom{9}{3} = 84$ groupes de colle possibles en tout.

   On compte combien il y a de groupes de colle sans fille : $\binom{5}{3} = 10$.

   Il y a donc $\binom{9}{3} - \binom{5}{3} = 74$ groupes de colle avec au moins une fille. ☐

Question 5 (9 pts)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E.

1. On dit que E est de dimension finie si : E admet une famille génératrice finie.
2. Énoncer le théorème de la base extraite : Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. Il existe une famille extraite $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$ qui est une base de E.
3. Énoncer le théorème de la base incomplète : Soit $\mathscr{F}$ une famille libre et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. On peut compléter la famille $\mathscr{F}$ avec des éléments de $\mathscr{G}$ en une base de$E$.
4. On suppose que E est de dimension n.
   (a) À quelle condition simple est-ce qu'une famille génératrice $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de E ? $p = n$
   (b) À quelle condition simple est-ce qu'une famille libre $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de E ? $p = n$
   ☐
5. $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$
6. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E, $\operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

7. On dit que F est un hyperplan de E si : $\dim(F) = n-1$
8. $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
9. On suppose que E est de dimension n et que $\dim(F) + \dim(G) = n$. Alors

$$F \oplus G = E \iff F \cap G = \{0_E\} \iff F + G = E$$

Question 6 (2 pts)

Soit $P_1 = X^2 - 1$, $P_2 = X^2 - 2X - 2$, $P_3 = X^2 + 4X + 1$. Calculer le rang de (P_1, P_2, P_3).

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (-2\lambda_2 + 4\lambda_2)X - \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}[X]}$, donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On prend $\lambda_3 = 1$, et on a $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_1 = -3$, donc $P_3 = 3P_1 - 2P_2 \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$. Donc $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$. Puis, avec $\lambda_3 = 0$, on voit que (P_1, P_2) est libre. D'où $\mathrm{rg}(P_1, P_2, P_3) = 2$. □

Contrôle de cours 18 - Dénombrement / Dimension - Sujet B
Jeudi 3 avril 2025

Question 1 (0,5 pt)

Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E. Alors :

$$\operatorname{card} A \cup B = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card} A \cap B$$

☐

Question 2 (0,5 pt)

Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre d'arrangements de p éléments de E est : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$. ☐

Question 3 (0,5 pt)

Quel est le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$? $n!$ ☐

Question 4 (2 pts)

1. On lance trois fois un dé à 6 faces et on note dans l'ordre les résultats obtenus.
   Combien y a-t-il de possibilités pour lesquelles les trois résultats sont différents ?
   On cherche le nombre de possibilités en faisant 3 tirages successifs sans remise (car les résultats doivent être différents) dans une urne avec 6 boules : il y en a $\dfrac{6!}{(6-3)!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$.
2. Un groupe d'amis composé de 3 fumeurs et 7 non fumeurs doivent désigner un groupe de 4 pour participer à une course.
   Combien y a-t-il de groupes différents possibles qui contiennent au moins un fumeur ?
   On cherche le nombre de possibilités en faisant 4 tirages simultanés dans le groupe de 10 amis : il y a $\dbinom{10}{4} = 210$ groupes possibles en tout.

   On compte combien il y a de groupes sans fumeur : $\dbinom{7}{4} = 35$.

   Il y a donc $\dbinom{10}{4} - \dbinom{7}{4} = 175$ groupes avec au moins un fumeur. ☐

Question 5 (9 pts)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E.

1. On dit que E est de dimension finie si : E admet une famille génératrice finie.
2. Énoncer le théorème de la base extraite : Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. Il existe une famille extraite $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$ qui est une base de E.
3. Énoncer le théorème de la base incomplète : Soit $\mathscr{F}$ une famille libre et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. On peut compléter la famille $\mathscr{F}$ avec des éléments de $\mathscr{G}$ en une base de$E$.
4. On suppose que E est de dimension n.
   (a) À quelle condition simple est-ce qu'une famille génératrice $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E ?
   $p = n$
   (b) À quelle condition simple est-ce qu'une famille libre $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E ? $p = n$
   ☐
5. $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$

6. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E, $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$
7. On dit que F est un hyperplan de E si : $\dim(F) = n-1$
8. $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
9. On suppose que E est de dimension n et que $\dim(F) + \dim(G) = n$. Alors

$$F \oplus G = E \iff F \cap G = \{0_E\} \iff F + G = E$$

Question 6 (2 pts)

Soit $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 - 2X - 2$, $P_3 = X^2 + 4X + 7$. Calculer le rang de (P_1, P_2, P_3).

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (-2\lambda_2 + 4\lambda_2)X + \lambda_1 - 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0_{\mathbb{R}[X]}$, donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On prend $\lambda_3 = 1$, et on a $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_1 = -3$, donc $P_3 = 3P_1 - 2P_2 \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$. Donc $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$. Puis, avec $\lambda_3 = 0$, on voit que (P_1, P_2) est libre. D'où $\mathrm{rg}(P_1, P_2, P_3) = 2$. $\square$