

Applications linéaires - Exercices

I. Linéarité, noyau, image

Exercice I.1. Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle linéaire?

- | | |
|---|---|
| 1. $f(x, y) = (x + 2y, -x - y)$
2. $f(x, y, z, t) = (x - 2z, 3t, x + y + t)$ | 3. $f(x, y, z) = (z + y, xy, x)$
4. $f(x, y, z) = (x + y, z, 1 + y + z)$ |
|---|---|

Exercice I.2. 1. Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$. Montrer que F est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Retrouver le résultat de la question précédente à l'aide de l'application $\phi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(f) = f(1) - f(0)$.

Exercice I.3. Dans chacun des cas suivants, montrer que φ est linéaire.

- | | |
|--|--|
| 1. $\varphi : \begin{cases} \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{cases}$
2. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}[X] & \rightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{cases}$
3. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{cases}$ | 4. $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{cases}$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fixée.
5. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & R \end{cases}$, où R est le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$. |
|--|--|

Exercice I.4. Montrer que les applications suivantes sont linéaires, puis en déterminer le noyau et l'image.

- | | |
|--|---|
| 1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (4x, y - x, 2x + y) \end{cases}$ | 2. $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + y - z, x - y) \end{cases}$ |
|--|---|

Exercice I.5. Soit $u : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui à la fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ associe la fonction $u(f) : x \mapsto xf(x)$. Montrer que u est linéaire puis étudier son injectivité et sa surjectivité.

Exercice I.6. 1. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

(a) Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

(b) Montrer que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im } f \subset \ker g$.

2. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2\text{id}_E = 0$.

(a) Montrer que f est un automorphisme.

(b) Montrer que $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \ker(f - 2\text{id}_E)$ et $\text{Im}(f - 2\text{id}_E) \subset \ker(f - \text{id}_E)$.

(c) Montrer que $E = \ker(f - \text{id}_E) \oplus \ker(f - 2\text{id}_E)$.

Exercice I.7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que : $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$.

2. Montrer que : $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2) \iff \ker(u) + \text{Im}(u) = E$.

Exercice I.8. Soient f et g deux endomorphisme d'un espace vectoriel E qui commutent. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .

Exercice I.9. Soit E un espace vectoriel et F, G deux sev de E . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$u(F) = u(G) \iff F + \ker(u) = G + \ker(u).$$

Exercice I.10. 1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit $\phi(P) = XP' - P$.

(a) Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Déterminer le noyau et l'image de ϕ .

(c) Vérifier que $\ker(\phi) \oplus \text{Im}(\phi) = \mathbb{R}_2[X]$.

(d) Est-ce que ϕ est un projecteur? une symétrie?

2. Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on définit $f(P) = P + (1 - X)P'$.

(a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) Déterminer le noyau de f .

II. Homothéties, projecteurs, symétries

Exercice II.1. 1. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, $D = \text{Vect}(\vec{v})$ et $P = \ker(f)$, où f est la forme linéaire définie sur E par $f(x, y, z) = x + 2y - z$.

(a) Montrer que P et D sont en somme directe.

(b) Justifier que P et D sont supplémentaires.

(c) Déterminer l'expression des projections $\pi_{D,P}$ et $\pi_{P,D}$.

2. Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(1) = P''(1) = 0\}$.

(a) Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Déterminer le projeté du polynôme $X^2 + X + 1$ sur F parallèlement à G , puis son symétrique par rapport à F parallèlement à G .

Exercice II.2. 1. Soit $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $p(x, y, z) = (-5x + 10y - 10z, -6x + 11y - 10z, -3x + 5y - 4z)$.

(a) Montrer que p est linéaire.

(b) Montrer que p est une projection sur un sev F parallèlement à un sev G et déterminer F et G .

2. Soit $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $s(x, y, z) = (x, -2x + y + 2z, 2x - z)$.

(a) Montrer que s est linéaire.

(b) Montrer que s est une symétrie par rapport à un sev F parallèlement à un sev G et déterminer F et G .

Exercice II.3. 1. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ en utilisant une symétrie bien choisie.

2. Soit $I = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est impaire}\}$ et $P = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est paire}\}$. En utilisant une symétrie, montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P \oplus I$.

Exercice II.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $p = \frac{1}{2}(\text{id}_E + f)$. Montrer que p est un projecteur ssi f est une symétrie.

Exercice II.5. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $x \in \ker(f - \lambda \text{id}_E) \iff f(x) = \lambda x$.

2. On pose $E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{id}_E)$. Justifier que E_λ est stable par f .

3. Que dire de $f|_{E_\lambda}$?

Exercice II.6. Soit p un projecteur de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $u \circ p + p \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $u \circ p = p \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice II.7. Soit $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$. Montrer que p et q sont deux projecteurs de même noyau.

III. Dimension finie

Exercice III.1. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = XP - P'$.

1. Montrer que f est linéaire.

2. Donner une base de $\text{Im}(f)$ et de $\ker(f)$.

3. f est-elle injective? surjective?

4. Reprendre les questions avec $\phi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ définie par $\phi(P) = (X + 1)P - (X^2 - 1)P'$.

Exercice III.2. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $J(P) = P(X + 1) - P(X)$ et $L(P) = XP' - 2P$.

1. Montrer que J est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et L est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Déterminer $\ker(J)$ et $\text{Im}(J)$.

3. Déterminer $\text{Im}(L)$, puis $\text{rg}(L)$, $\dim(\ker(L))$ et enfin $\ker(L)$.

Exercice III.3. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (z, x - y, y + z)$ est un automorphisme.

Exercice III.4. Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit l'application $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ par $\varphi(e_1) = e_1 + e_2$, $\varphi(e_2) = e_1 - e_2$ et $\varphi(e_3) = e_1 + \lambda e_3$.

1. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Exprimer $\varphi(u)$ en fonction de x, y et z .

2. Comment choisir λ pour que φ soit injective? surjective?

Exercice III.5. Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n$.

1. Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Montrer que l'application $\varphi : u \in E \mapsto (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme.
3. En déduire la dimension de E puis une base de E .

Exercice III.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. On définit l'application ϕ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par : $\phi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$.

1. Justifier que ϕ est linéaire.
2. Montrer que ϕ est un isomorphisme.
3. En déduire que pour tout $(n+1)$ -uplet $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ de réels, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $P(a_0) = b_0, P(a_1) = b_1, \dots, P(a_n) = b_n$.

Exercice III.7. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est nilpotent et on pose p le plus petit entier naturel tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
2. Comparer n et p et en déduire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice III.8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que : $\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}^* \mid u^p(x) = 0_E$. Montrer que u est nilpotent.

Exercice III.9. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et f un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid f(x) = \lambda x$.

On veut montrer que f est une homothétie. Pour cela, on prend $x_0 \in E$ un vecteur non nul et $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tel que $f(x_0) = \lambda_0 x_0$.

1. Que doit-on montrer?
2. Soit $y \in E$ tel que (x_0, y) est liée. Déterminer $f(y)$.
3. Soit $y \in E$ tel que (x_0, y) est libre. Montrer que $f(y) = \lambda_0 y$.
4. Conclure.

Exercice III.10. Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une forme linéaire sur E . On prend $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.

1. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \text{Vect}(a)$.
2. On suppose que $f(a) = 1$ et on pose pour tout $x \in E, p(x) = f(x)a$.
Montrer que p est un projecteur de E et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice III.11. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$ et en déterminer une base.

Exercice III.12. Soit $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K})$ une forme linéaire telle que pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \varphi((X-a)P) = 0$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X], \varphi(P) = \lambda P(a)$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K})$ une forme linéaire telle que pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X], \varphi((X-a)^2 P) = 0$.
Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X], \varphi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$.

Exercice III.13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ une forme linéaire. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = \text{tr}(AM)$.

Exercice III.14. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.

Exercice III.15 (Mines-Ponts PC 2018). Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$f + g = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq \dim(E).$$

1. Montrer que $\text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g) = E$.
2. Justifier que $f \circ g = g \circ f$ et en déduire que : $\forall x \in E, f \circ g(x) = 0$
3. Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice III.16 (CCP PSI 2018). Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ définie par $\varphi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Comparer le degré de P avec celui de $\varphi(P)$.
2. Déterminer le noyau de φ .
3. Étudier la surjectivité de φ .

Exercice III.17 (Mines-Ponts PC 2018). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1) = 0 \right\}$.

1. Montrer que A est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa dimension.
2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer $A \cap \text{Vect}(1, (X-1)^k)$.
3. Donner une base de A .

Exercice III.18 (X PC 2018). Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2) \iff E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.