Contrôle de cours 19 - Dimension / Probabilités - Sujet A
Jeudi 10 avril 2025

Question 1 (6 pts)

Soit $F = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+b=0\}$.

1. Montrer que F est un sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   La matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est dans F car $0+0=0$.
   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix}$. De plus, $\lambda a + a' + \lambda b + b' = \lambda(a+b) + a' + b' = 0$ car M et N sont dans F.
   Donc F est bien un sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la dimension de F.
   On a $F = \left\{ \begin{pmatrix} -b & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ avec } b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$, donc $F = \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie ensuite facilement que (M_1, M_2, M_3) est une famille libre. C'est donc une base de F et $\dim(F) = 3$.
3. Soit $G = \mathrm{Vect}(I_2)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   Comme $I_2 \notin F = \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3)$, la famille (M_1, M_2, M_3, I_2) est libre. Comme $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, c'est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, F et G sont bien supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. $\square$

Question 2 (4 pts)

Soit Ω un univers fini.

1. Donner la définition de système complet d'événements de Ω.
   On dit qu'une famille d'événements $(A_1, \ldots, A_n)$ de Ω est un SCE si les événements sont deux à deux disjoints et si leur réunion vaut Ω.
2. Énoncer la formule des probabilités totales.
   Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un SCE de Ω et B un événement. Alors $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)$.
3. Énoncer la formule des probabilités composées.
   Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements de Ω. Alors $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \cdots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$.
4. Donner la définition de deux événements indépendants.
   On dit que deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. $\square$

Question 3 (2 pts)

On dispose de 3 urnes vides et de 10 boules. On place au hasard les 10 boules dans les urnes : toutes les répartitions ont la même probabilité.
Quelle est la probabilité que toutes les boules soient dans la même urne ?
Une répartition revient à choisir une urne pour chaque boule (choix successifs dans remise) : il y en a 3^{10}. Il y a 3 répartitions qui donnent toutes les boules dans la même urne. Comme on est en équiprobabilité, la probabilité cherchée est $\frac{3}{3^{10}} = \frac{1}{3^9}$. $\square$

Question 4 (5 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce truquée qui donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec probabilité q. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note F_i : « on obtient Face au i-ème lancer ».

1. Donner une relation entre p et q : $p = 1 - q$
2. On note A : « on obtient que des Faces ». Écrire A à l'aide des $F_1, \dots, F_n$ puis calculer $P(A)$ en fonction de p.
   $A = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$. Les événements sont indépendants, donc $P(A) = P(F_1) \cdots P(F_n) = (1-p)^n$.
3. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note B_k : « le premier Face est au k-ième lancer. Écrire B_k avec les $F_1, \dots, F_n$, puis calculer $P(B_k)$.
   $B_1 = F_1$ et pour $k > 1$, $B_k = \overline{F_1} \cap \cdots \overline{F_{k-1}} \cap F_k$. Par indépendance, $P(B_k) = p^{k-1}(1-p)$. □

Contrôle de cours 19 - Dimension / Probabilités - Sujet B
Jeudi 10 avril 2025

Question 1 (6 pts)

Soit $F = \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid c + d = 0\}$.

1. Montrer que F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   La matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est dans F car $0 + 0 = 0$.
   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix}$. De plus, $\lambda c + c' + \lambda d + d' = \lambda(c + d) + c' + d' = 0$ car M et N sont dans F.
   Donc F est bien un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la dimension de F.
   On a $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -d & d \end{pmatrix}, \text{ avec } a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$, donc $F = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie ensuite facilement que (M_1, M_2, M_3) est une famille libre. C'est donc une base de F et $\dim(F) = 3$.
3. Soit $G = \text{Vect}(I_2)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Comme $I_2 \notin F = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$, la famille (M_1, M_2, M_3, I_2) est libre. Comme $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, F et G sont bien supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. □

Question 2 (4 pts)

Soit Ω un univers fini.

1. Donner la définition de système complet d'événements de Ω.
   On dit qu'une famille d'événements $(A_1, \dots, A_n)$ de Ω est un SCE si les événements sont deux à deux disjoints et si leur réunion vaut Ω.
2. Énoncer la formule des probabilités totales.
   Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un SCE de Ω et B un événement. Alors $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)$.
3. Énoncer la formule des probabilités composées.
   Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements de Ω. Alors $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \cdots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$.
4. Donner la définition de deux événements indépendants.
   On dit que deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. □

Question 3 (2 pts)

On dispose de 3 urnes vides et de 10 boules. On place au hasard les 10 boules dans les urnes : toutes les répartitions ont la même probabilité.
Quelle est la probabilité que toutes les boules soient dans la même urne ?
Une répartition revient à choisir une urne pour chaque boule (choix successifs dans remise) : il y en a 3^{10}. Il y a 3 répartitions qui donnent toutes les boules dans la même urne. Comme on est en équiprobabilité, la probabilité cherchée est $\frac{3}{3^{10}} = \frac{1}{3^9}$. □

Question 4 (5 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce truquée qui donne Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec probabilité q. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note F_i : « on obtient Face au i-ème lancer ».

1. Donner une relation entre p et q : $p = 1 - q$
2. On note A : « on obtient aucun Face ». Écrire A à l'aide des $F_1, \dots, F_n$ puis calculer $P(A)$ en fonction de p.
   $A = \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap \overline{F_n}$. Les événements sont indépendants, donc $P(A) = P(\overline{F_1}) \cdots P(\overline{F_n}) = p^n$.
3. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note B_k : « le premier Pile est au k-ième lancer. Écrire B_k avec les $F_1, \dots, F_n$, puis calculer $P(B_k)$.
   $B_1 = \overline{F_1}$ et pour $k > 1$, $B_k = F_1 \cap \cdots F_{k-1} \cap \overline{F_k}$. Par indépendance, $P(B_k) = (1-p)^{k-1} p$. □