

Colles 25 - 28/04/2025 au 02/05/2025

Thèmes traités en classe

- Chapitre 21 : Dénombrement.
Exercices traités en classe : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 17, 20.
- Chapitre 22 : Dimension.
Exercices traités en cours : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19.
- Chapitre 23 : Probabilités.
 1. Vocabulaire : univers, événements, issues, système complet d'événements.
 2. Probabilité sur un univers, distribution de probabilités.
 3. Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités totales, formule de probabilités composées, formule de Bayes.
 4. Indépendance, indépendance mutuelle.**Exercices traités en cours** : I.1, I.2, I.3, I.4, I.6, II.2, II.4, II.5, III.3, III.4, III.5, IV.1.

Questions de cours

Question 1

- C21 Exercice 20 : établir la relation $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$ en comptant les parties à p éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de deux façons différentes.
- Donner la définition de dimension finie et énoncer le théorème de la base incomplète. Montrer que tout sev d'un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie admet un supplémentaire.
- C22 Exercice 9 : soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$. Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$ puis trouver une base de E et une base d'un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- C22 Exercice 14 : soit E de dimension 3 et F et G deux sev avec $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 2$. Montrer que soit $F \subset G$, soit $F \oplus G = E$ (faire un dessin pour illustrer).
- C22 Exercice 18 : soit $n \geq 1$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
 1. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{ij}$.
 2. Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
 3. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{L}$.
- Définition de probabilité conditionnelle sachant un événement. Montrer que si $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $P(B) > 0$, alors P_B est une probabilité sur Ω .
- Énoncer les trois formules sur les probabilités conditionnelles. Démontrer la formule des probabilités composées.
- Donner la définition de système complet d'événements puis énoncer la formule des probabilités totales. Exercice II.5 : on a n urnes numérotées de 1 à n et l'urne i contient i boules blanches et $n - i$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on tire successivement deux boules avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches?
- C23 Exercice III.3 : $2n$ lancers d'une pièce avec probabilité $\frac{2}{3}$ de tomber sur face. Exprimer A : « on obtient une alternance parfaite de piles et de faces », B : « on obtient un seul pile » et C : « on n'a jamais pile suivi de face » à l'aide d'événements plus simples puis calculer les probabilités de A et de B.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
 - ▷ Principe des tiroirs.
 - ▷ Cardinal d'une union.
 - ▷ Principe des bergers.
 - ▷ Cardinal d'un produit cartésien.

- ▷ Nombre d'applications de E dans F .
- ▷ Nombre d'arrangements.
- ▷ Nombre de permutations.
- ▷ Nombre de combinaisons.
- ▷ Formules sur les coefficients binomiaux.
- ▷ Théorème de la base extraite.
- ▷ Théorème de la base incomplète.
- ▷ Lemme de Steinitz.
- ▷ Condition sur le cardinal pour qu'une famille libre/génératrice soit une base.
- ▷ Dimension d'une somme (formule de Grassmann).
- ▷ Supplémentaires et dimension.
- ▷ Probabilité et distribution de probabilités.
- ▷ Rang d'une famille libre/génératrice.
- ▷ Formule des probabilités composées.
- ▷ Formule des probabilités totales.
- ▷ Formule de Bayes.
- ▷ Indépendance et contraires.

A savoir faire

1. Connaître les formules de dénombrement.
2. Savoir modéliser une situation de dénombrement par des tirages successifs avec/sans remise ou simultanés.
3. Savoir déterminer la dimension d'un sev.
4. Savoir montrer que deux sev sont supplémentaires en utilisant des bases/les dimensions.
5. Savoir calculer le rang d'une famille de vecteurs.
6. Savoir décomposer un événement comme une union/intersection d'événements plus simples.
7. Savoir appliquer la formule des probabilités composées.
8. Savoir appliquer la formule des probabilités totales en utilisant un SCE.
9. Connaître la notion d'indépendance et savoir l'utiliser pour calculer la probabilité d'une intersection.