Contrôle de cours 19 - Applications linéaires / Intégration - Sujet A
Jeudi 11 mai 2023

Nom et prénom :

....

Durée : 15 minutes.
L'usage de la calculatrice est interdit.

Question 1 (2 pts)

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. f est surjective ssi
2. f est injective ssi
3. f est bijective ssi ☐

Question 2 (5 pts)

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. On dit que f est de rang fini si :
   Dans ce cas, le rang de f est :
2. Comparer $\mathrm{rg}(f)$ et $\dim(E)$:
3. Comparer $\mathrm{rg}(f)$ et $\dim(F)$:
4. f est injective ssi $\mathrm{rg}(f)$
5. f est surjective ssi $\mathrm{rg}(f)$
6. On suppose que E est de dimension finie. Donner la formule du théorème du rang :
7. Si $\dim(E) = \dim(F)$, f est bijective $\iff$ ☐

Question 3 (2 pts)

Soit E de dimension n.

1. Un hyperplan de E est
2. Une forme linéaire sur E est
3. Si u est une forme linéaire sur E, est-ce que $\ker(u)$ est toujours un hyperplan ?
4. Si H est un hyperplan de E, comment trouver un supplémentaire de H dans E ? ☐

Question 4 (4 pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définit par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (3x - y, -6x + 2y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer $\ker(f)$.

3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ? ☐

Question 5 (2 pts)

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$. ☐

Contrôle de cours 19 - Applications linéaires / Intégration - Sujet B
Jeudi 11 mai 2023

Nom et prénom :

....

Durée : 15 minutes.
L'usage de la calculatrice est interdit.

Question 1 (2 pts)

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. f est surjective ssi
2. f est injective ssi
3. f est bijective ssi ☐

Question 2 (5 pts)

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. On dit que f est de rang fini si :
   Dans ce cas, le rang de f est :
2. Comparer $\text{rg}(f)$ et $\dim(E)$:
3. Comparer $\text{rg}(f)$ et $\dim(F)$:
4. f est injective ssi $\text{rg}(f)$
5. f est surjective ssi $\text{rg}(f)$
6. On suppose que E est de dimension finie. Donner la formule du théorème du rang :
7. Si $\dim(E) = \dim(F)$, f est bijective $\Longleftrightarrow$ ☐

Question 3 (2 pts)

Soit E de dimension n.

1. Un hyperplan de E est
2. Une forme linéaire sur E est
3. Si u est une forme linéaire sur E, est-ce que $\ker(u)$ est toujours un hyperplan ?
4. Si H est un hyperplan de E, comment trouver un supplémentaire de H dans E ? ☐

Question 4 (4 pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définit par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (4x - 2y, 2x - y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer $\ker(f)$.

3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ? □

Question 5 (2 pts)

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(1-t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t$. □