Contrôle de cours 19 - Applications linéaires / Intégration - Sujet A

Jeudi 11 mai 2023

Question 1 (2 pts)

Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -ev et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est surjective ssi $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F
2. f est injective ssi $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre
3. f est bijective ssi $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F □

Question 2 (5 pts)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. On dit que f est de rang fini si : $\text{Im}(f)$ est de dimension finie.
Dans ce cas, le rang de f est : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.
2. Comparer $\text{rg}(f)$ et $\dim(E)$: $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$
3. Comparer $\text{rg}(f)$ et $\dim(F)$: $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$
4. f est injective ssi $\text{rg}(f) = \dim(E)$
5. f est surjective ssi $\text{rg}(f) = \dim(F)$
6. On suppose que E est de dimension finie. Donner la formule du théorème du rang : $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$
7. Si $\dim(E) = \dim(F)$, f est bijective $\iff f$ est injective $\iff f$ est surjective. □

Question 3 (2 pts)

Soit E de dimension n .

1. Un hyperplan de E est un sev de E de dimension $n - 1$
2. Une forme linéaire sur E est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
3. Si u est une forme linéaire sur E , est-ce que $\ker(u)$ est toujours un hyperplan? **Non, si la forme linéaire est nulle!**
4. Si H est un hyperplan de E , comment trouver un supplémentaire de H dans E ? **On prend $\text{Vect}(u)$ avec $u \notin H$** □

Question 4 (4 pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définit par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (3x - y, -6x + 2y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(x, y) + \lambda(x', y') = (x + \lambda x', y + \lambda y')$, donc

$$\begin{aligned} f((x, y) + \lambda(x', y')) &= (3(x + \lambda x') - (y + \lambda y'), -6(x + \lambda x') + 2(y + \lambda y')) \\ &= (3x - y + \lambda(3x' - y'), -6x + 2y + \lambda(-6x' + 2y')) \\ &= (3x - y, -6x + 2y) + \lambda(3x' - y', -6x' + 2y') \\ &= f(x, y) + \lambda f(x', y') \end{aligned}$$

donc f est linéaire. Comme elle va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer $\ker(f)$.

$$(x, y) \in \ker(f) \iff (3x - y, -6x + 2y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 3x - y = 0 \\ -6x + 2y = 0 \end{cases} \iff y = 3x, \text{ donc } \ker(f) = \text{Vect}((1, 3)).$$

3. Déterminer $\text{Im}(f)$.

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(0, 1), f(1, 0)) = \text{Vect}((-1, 2), (3, -6)) = \text{Vect}((-1, 2))$ car les deux vecteurs $(-1, 2)$ et $(3, -6)$ sont colinéaires.

4. f est-elle injective? surjective? bijective?

f n'est pas injective car $\ker(f) \neq \{(0, 0)\}$ et pas surjective car $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2$. □

Question 5 (2 pts)

Calculer $\int_0^1 (1-t)e^{-2t} dt$.

On fait une IPP : on pose $u(t) = 1-t$ et $v(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}$ de sorte que $u'(t) = -1$ et $v'(t) = e^{-2t}$:

$$\int_0^1 (1-t)e^{-2t} dt = - \left[(1-t) \frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} [e^{-2t}]_0^1 = \frac{1+e^{-2}}{4}. \quad \square$$

Contrôle de cours 19 - Applications linéaires / Intégration - Sujet B

Jeudi 11 mai 2023

Question 1 (5 pts)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. On dit que f est de rang fini si : **Im(f) est de dimension finie.**
Dans ce cas, le rang de f est : **$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.**
2. Comparer $\text{rg}(f)$ et $\dim(E)$: **$\text{rg}(f) \leq \dim(E)$**
3. Comparer $\text{rg}(f)$ et $\dim(F)$: **$\text{rg}(f) \leq \dim(F)$**
4. f est injective ssi **$\text{rg}(f) = \dim(E)$**
5. f est surjective ssi **$\text{rg}(f) = \dim(F)$**
6. On suppose que E est de dimension finie. Donner la formule du théorème du rang : **$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$**
7. Si $\dim(E) = \dim(F)$, f est bijective $\iff f$ est injective $\iff f$ est surjective. □

Question 2 (2 pts)

Soit E de dimension n .

1. Un hyperplan de E est **un sev de E de dimension $n - 1$**
2. Une forme linéaire sur E est **un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$**
3. Si u est une forme linéaire sur E , est-ce que $\ker(u)$ est toujours un hyperplan? **Non, si la forme linéaire est nulle!**
4. Si H est un hyperplan de E , comment trouver un supplémentaire de H dans E ? **On prend $\text{Vect}(u)$ avec $u \notin H$** □

Question 3 (4 pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définit par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (4x - 2y, 2x - y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(x, y) + \lambda(x', y') = (x + \lambda x', y + \lambda y')$, donc

$$\begin{aligned} f((x, y) + \lambda(x', y')) &= (4(x + \lambda x') - 2(y + \lambda y'), 2(x + \lambda x') - (y + \lambda y')) \\ &= (4x - 2y + \lambda(4x' - 2y'), 2x - y + \lambda(2x' - y')) \\ &= (4x - 2y, x + y) + \lambda(4x' - 2y', 2x' - y') \\ &= f(x, y) + \lambda f(x', y') \end{aligned}$$

donc f est linéaire. Comme elle va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer $\ker(f)$.

$$(x, y) \in \ker(f) \iff (4x - 2y, 2x - y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \iff y = 2x, \text{ donc } \ker(f) = \text{Vect}((1, 2)).$$

3. Déterminer $\text{Im}(f)$.

$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(0, 1), f(1, 0)) = \text{Vect}((-2, -1), (4, 2)) = \text{Vect}((-2, -1))$ car les deux vecteurs $(-2, -1)$ et $(4, 2)$ sont colinéaires.

4. f est-elle injective? surjective? bijective?

f n'est pas injective car $\ker(f) \neq \{(0, 0)\}$ et pas surjective car $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^2$. □

Question 4 (2 pts)

Calculer $\int_0^{\pi/2} (1-t) \cos(2t) dt$.

On fait une IPP : on pose $u(t) = 1-t$ et $v(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$ de sorte que $u'(t) = -1$ et $v'(t) = \cos(2t)$:

$$\int_0^{\pi/2} (1-t) \cos(2t) dt = \left[(1-t) \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(2t) dt = -\frac{1}{4} [\cos(2t)]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}. \quad \square$$