Correction du Devoir sur temps libre 7

Correction de l'exercice 1 :

1. Choisir 3 boules parmi n revient a prendre une partie à 3 éléments de $[\![1,n]\!]$. Or, il y a $\binom{n}{3}$ telles parties.
2. Lorsque $n=9$ et le plus petit numéro est 4, une des boules est forcément 4 et les deux autres forment une partie à 2 éléments parmi $\{5,6,7,8,9\}$. Il y a donc $\binom{5}{2}=10$ tirages possibles.
3. Cela revient à choisir 2 boules parmi les $n-k$ qui sont plus grandes que k. On a donc $\binom{n-k}{2}$ tirages possibles.
4. On peut séparer les tirages possibles selon le plus petit numéro obtenu. Le nombre total de tirages doit faire $\binom{n}{3}$. Donc $\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-k}{2}=\binom{n}{3}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. (a) Il y a $\boxed{\text{3 tirages unicolores}}$.
   (b) On choisit les deux couleurs présentes (3 choix), puis on choisit le nombre de boules de chaque couleur 3 choix possibles $((1,3),(2,2),(3,1))$. En tout, il y a $\boxed{\text{9 tirages bicolores possibles}}$.
   (c) $\boxed{\text{Il y a 3 tirages tricolores possibles : on choisit juste la couleur qui est en double.}}$
2. (a) Il y a trois choix de couleurs, ensuite on doit prendre toutes les boules de la couleur.
   Il y a donc $\boxed{\text{3 tirages unicolores possibles}}$.
   (b) On commence par choisir deux couleurs : $\binom{3}{2}=3$ choix possibles. Puis, on distingue selon le nombre de boules de chaque couleur : 3 cas possibles $((1,3),(2,2),(3,1))$. Dans chaque cas, on doit choisir les boules : ce qui donne $\binom{4}{1}\binom{4}{3}=16$, $\binom{4}{2}\binom{4}{2}=36$ et $\binom{4}{3}\binom{4}{1}=16$ choix pour chaque cas. Pour chaque paire de couleurs, on a donc 68 choix possibles. En tout, il y a $\boxed{\text{204 tirages bicolores possibles}}$.
   (c) En tout, il y a $\binom{12}{4}=495$ tirages distincts. Ceux qui donnent 3 couleurs différentes sont tous ceux qui sont ni unicolores, ni bicolores : il y en a $\boxed{495 - 204 - 3 = 288}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. $L_0=-\frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$, $L_1=\frac{1}{2}(X+1)(X-1)(X-2)$, $L_2=-\frac{1}{2}(X+1)X(X-2)$ et $L_3=\frac{1}{6}(X+1)X(X-1)$.
2. $\deg(L_i)=n$ car c'est un produit de n facteurs de degré 1. Son coefficient dominant est $\frac{1}{\pi_i}$.
3. On a $L_i(a_k)=\dfrac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}(a_k-a_i)}{\pi_i}$:
   - si $k\neq i$, alors un des facteurs s'annule, donc $L_i(a_k)=0$;
   - si $k=i$, alors le numérateur est égal à π_i, donc $L_i(a_i)=1$.

   Donc $\boxed{L_i(a_k)=\delta_{ik}}$.
4. Commençons par démontrer que $\mathscr{L}$ est libre. Soit $\lambda_0,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tels que : $\sum_{k=0}^{n}\lambda_kL_k=0_{\mathbb{R}[X]}$. En évaluant en a_i, pour $i\in[\![0,n]\!]$, on trouve $\lambda_i=0$. Donc $\mathscr{L}$ est libre.
   Puis $\mathrm{card}(\mathscr{L})=n+1=\dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc $\boxed{\mathscr{L}\text{ est une base de }\mathbb{R}_n[X]}$.
5. On note $p_0,\dots,p_n$ les coordonnées de P dans $\mathscr{L}$. Alors $P=\sum_{k=0}^{n}p_kL_k$. En évaluant en a_i, pour $i\in[\![0,n]\!]$, on trouve $p_i=P(a_i)$. Donc $\boxed{\text{les coordonnées de } P \text{ dans } \mathscr{L} \text{ sont } (P(a_0),\dots,P(a_n))}$.

6. Soit $i \in [\![0,n]\!]$.

$$\begin{aligned}\pi_i &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(i-j)\\ &= \prod_{j=0}^{i-1}(i-j)\prod_{j=i+1}^{n}(i-j)\\ &= i!\prod_{j=1}^{n-i}(-j)\\ &= (-1)^{n-i}i!(n-i)!\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\dfrac{1}{\pi_i} = (-1)^{n-i}\dfrac{1}{i!(n-i)!} = \dfrac{(-1)^{n-i}}{n!}\begin{pmatrix}n\\ i\end{pmatrix}}$.

7. $R \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $\forall i \in [\![1,n]\!], R(i) = i^n$ ssi les coordonnées de R dans la base $\mathscr{L}$ sont $(0,1,2^n,\dots,n^n)$. Donc R existe est est unique.

8. On a $R = \sum_{k=0}^{n} k^n L_k$. On a aussi $R = X^n$. Ainsi le coefficient de degré n de R est 1. Or, il est donné par la somme des coefficients dominants de $k^n L_k$: $1 = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^{n-k}}{n!}\begin{pmatrix}n\\ k\end{pmatrix}k^n$.

   On obtient ainsi : $\boxed{\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\begin{pmatrix}n\\ i\end{pmatrix}i^n = n!}$.

Correction de l'exercice 4 :

1.
   - La matrice nulle est bien dans F.
   - Soient $M,N \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(\lambda M+N)_{11} + (\lambda M+N)_{22} = \lambda(M_{11}+M_{22}) + N_{11}+N_{22} = 0$. Donc $\lambda M+N \in F$.

   $\boxed{F \text{ est bien un sev de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

   Soit $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. La matrice M est dans F ssi $a=-d$. Donc $F = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}, a,b,c \in\right\} = \text{Vect}\big(E_{1,1}-E_{2,2},E_{2,1},E_{1,2}\big)$.
   La famille $(E_{1,1}-E_{2,2},E_{2,1},E_{1,2}$ est génératrice de F et on vérifie facilement qu'elle est libre.
   Donc $\boxed{(E_{1,1}-E_{2,2},E_{2,1},E_{1,2}) \text{ est une base de } F}$.

2. (a) L'identité et la matrice nulle sont dans G.

   (b)
   - La matrice nulle est dans G.
   - Soient $A,B \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $(\lambda A+B)M = \lambda AM + BM = \lambda MA + MB = M(\lambda A+B)$. Donc $\lambda A + B \in G$.

   $\boxed{G \text{ est un sev de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

   (c)
   - $\Rightarrow$: supposons que $A \in G$. Alors pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $AM = MA$. En particulier, pour $M = E_{i,j}$ avec $(i,j) \in [\![1,2]\!]^2$.
   - $\Leftarrow$: supposons que pour tout $(i,j) \in [\![1,2]\!]^2$, $AE_{i,j} = E_{i,j}A$. Prenons $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $M = \sum_{(i,j)\in[\![1,2]\!]^2} m_{ij}E_{i,j}$, donc $AM = \sum_{(i,j)\in[\![1,2]\!]^2} m_{ij}AE_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,2]\!]^2} m_{ij}E_{i,j}A = MA$. Donc $A \in G$.

   (d) Facile!

   (e) $AE_{1,1} = E_{1,1}A \iff y=z=0$, $AE_{1,2} = E_{1,2}A \iff x=t, z=0$, etc... On trouve bien $A = \begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$.

   (f) D'après la question précédente, $G = \text{Vect}(I_2)$, donc $\boxed{\text{une base de } G \text{ est } (I_2)}$.

3. Déjà, $\dim(F)+\dim(G) = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. Vérifions que F et G sont en somme directe : soit $A \in F\cap G$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $A = xI_2$ car $A \in G$. De plus, $2x=0$, donc $x=0$ car $A \in F$. Donc $A = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$. Ainsi, F et G sont en somme directe, et $\boxed{F \oplus G = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

Correction de l'exercice 5 :

1. (a) Le polynôme P a une infinité de racines : $\boxed{\text{c'est le polynôme nul!}}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{e}^x + \lambda_2 (\mathrm{e}^x)^2 + \cdots + \lambda_n (\mathrm{e}^x)^n = 0.$$
Si on pose $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\mathrm{e}^x) = 0$. Comme la fonction exponentielle est surjective sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $P(y) = 0$. D'après la question précédente, P est le polynôme nul : tous ses coefficients sont nuls.
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (f_0, \ldots, f_n) \text{ est libre}}$.

(c) $\boxed{\text{Non}}$: sinon, il aurait une dimension d, et toutes les familles libres dans E auraient un cardinal inférieur ou égal à d. Or, la question précédente affirme que $(f_0, \ldots, f_d)$ est libre : elle est de cardinal $d+1$ donc c'est une contradiction.

2. (a) Comme la famille $(f_0, \ldots f_n)$ est libre, $\boxed{\dim(F) = \mathrm{rg}(f_0, \ldots, f_n) = n+1}$.
(b) Supposons qu'il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{ch} = \lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\mathrm{ch}(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{e}^x + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{nx}.$$
En particulier, en faisant tendre x vers $-\infty$, on obtient $+\infty = \lambda_0$!
Ainsi, $\boxed{\mathrm{ch} \notin F}$.
(c) Comme $\mathrm{ch} \notin \mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n)$, la famille $(\mathrm{ch}, f_0, \ldots, f_n)$ est libre, donc $\boxed{\dim(\mathrm{Vect}(\mathrm{ch}, f_0, \ldots, f_n)) = n+2}$.

Correction de l'exercice 6 : On commence par noter pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, P_k : « on obtient pile au lancer k »et F_k : « on obtient pile au lancer k ».

1. On cherche $P(P_1 \cap P_2)$. Par indépendance, $\boxed{P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P(P_2) = \frac{4}{9}}$.
2. On cherche $P(F_1 \cap F_2 \cap P_3)$. Par indépendance, $\boxed{P(F_1 \cap F_2 \cap P_3) = P(F_1)P(F_2)P(P_3) = \frac{2}{27}}$.
3. De même, $\boxed{P(P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4) = P(P_1)P(P_2)P(F_3)P(F_4) = \frac{4}{81}}$.
4. On note B : « on obtient un pile et deux faces lors des trois premiers lancers ». On cherche $P_B(P_2)$.
On a $B = (P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3)$ où l'union est disjointe. Par indépendance, on a donc $P(B) = \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$.
Puis, $B \cap P_2 = F_1 \cap P_2 \cap F_3$, donc $P(B \cap P_2) = \frac{2}{27}$.
Enfin, $\boxed{P_B(P_2) = \frac{P(B \cap P_2)}{P(B)} = \frac{1}{3}}$.
5. (a) $\boxed{a_2 = P(P_1 \cap P_2) = \frac{4}{9}}$, $\boxed{a_3 = P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = \frac{4}{27}}$ et $\boxed{a_4 = P((F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)) = \frac{4}{81} + \frac{8}{81} = \frac{4}{27}}$.
(b) Soit $n \geq 2$. La famille (P_1, F_1) est un SCE : on applique la formule des probabilités totales,
$$P(A_{n+2}) = P(A_{n+2} \cap P_1) + P(A_{n+2} \cap F_1) = P_{P_1}(A_{n+2})P(P_1) + P_{F_1}(A_{n+2})P(F_1)$$
Or, si P_1 est réalisé, pour que A_{n+2} soit réalisé, il faut forcément avoir un F_2, puis une série de n lancers qui donne PP la première fois aux deux derniers lancers : donc $P_{P_1}(A_{n+2}) = P(F_2)P(A_n)$.
D'autre part, si F_1 est realisé, pour que A_{n+2} soit réalisé, on est ramené à $n+1$ lancers qui donnent PP la première fois aux deux derniers : donc $P_{F_1}(A_{n+2}) = P(A_{n+1})$.
Ainsi, $\boxed{a_{n+2} = \frac{2}{9} a_n + \frac{1}{3} a_{n+1}}$.
(c) L'équation caractéristique a pour racines $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq 2$, $a_n = A\frac{(-1)^n}{3^n} + B\frac{2^n}{3^n}$. Pour $n = 2$ et $n = 3$, on trouve le système :
$$\begin{cases} A + 4B = 4 \\ -A + 8B = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 4 - 4B = \frac{4}{3} \\ B = \frac{2}{3} \end{cases}$$
Donc $\boxed{\forall n \geq 2,\ a_n = \frac{(-1)^n 4}{3^{n+1}} + \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}$.

(d) $\sum_{k=2}^{n} a_k = 4\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}} = \frac{4}{27}\frac{1-\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}} + \frac{8}{27}\frac{1-\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}}{1-\frac{2}{3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{9}+\frac{8}{9}$, donc $\boxed{\sum_{k=2}^{n} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$.

Les événements $A_2, \ldots, A_n, \ldots$ étant disjoints, on peut interpréter (voir deuxième année) en disant que $P(\bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k) = 1$ et l'événement $\bigcup_{k=2}^{n} A_k$ est « on obtient au moins une fois PP », donc si on réalise une série infinie de lancers, on va presque sûrement obtenir deux piles successifs.