Colles 26 - 05/05/2025 au 09/05/2025

Thèmes traités en classe

- Chapitre 23 : Probabilités.
  Exercices traités en cours : I.1, I.2, I.3, I.4, I.6, II.2, II.4, II.5, III.3, III.4, III.5, IV.1.
- Chapitre 24 : Applications linéaires.
  1. Définitions, vocabulaire.
  2. Opérations sur les applications linéaires.
  3. Noyau, image, injectivité, surjectivité.
  4. Endomorphismes remarquables : homothéties, projecteurs, symétries.

  Exercices traités en cours : I.2, I.3, I.4, I.5, I.6, I.8, I.10, II.1, II.2

Questions de cours

Question 1

- Définition de probabilité conditionnelle sachant un événement. Montrer que si $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec $P(B) > 0$, alors P_B est une probabilité sur Ω.
- Énoncer les trois formules sur les probabilités conditionnelles. Démontrer la formule des probabilités composées.
- Donner la définition de système complet d'événements puis énoncer la formule des probabilités totales. Exercice II.5 : on a n urnes numérotées de 1 à n et l'urne i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on tire successivement deux boules avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?
- C23 Exercice III.3 : $2n$ lancers d'une pièce avec probabilité $\frac{2}{3}$ de tomber sur face. Exprimer A : « on obtient une alternance parfaite de piles et de faces », B : « on obtient un seul pile » et C : « on n'a jamais pile suivi de face » à l'aide d'évènements plus simples puis calculer les probabilités de A et de B.
- Montrer que la composée de deux applications linéaires est linéaire, puis que la réciproque d'un isomorphisme est linéaire.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Donner les définitions de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $\ker(f)$ est un sev de E.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors $f(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)) = \mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))$.
- C24 Exercice I.8 : soit $f,g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.
- Montrer que l'application $\varphi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to M^\top \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une symétrie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sev supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- C24 Exercice I.6 : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  - ▷ Montrer que $\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_E) \subset \ker(f-2\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{id}_E) \subset \ker(f-\mathrm{id}_E)$.
  - ▷ Montrer que $E = \ker(f-\mathrm{id}_E) \oplus \ker(f-2\,\mathrm{id}_E)$.
- C24 Exercice II.1 : Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(1) = P''(1) = 0\}$.
  - ▷ Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$.
  - ▷ Déterminer le projeté du polynôme $X^2 + X + 1$ sur F parallèlement à G, puis son symétrique par rapport à F parallèlement à G.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
  - ▷ Probabilité et distribution de probabilités.
  - ▷ Rang d'une famille libre/génératrice.
  - ▷ Formule des probabilités composées.

- ▹ Formule des probabilités totales.
- ▹ Formule de Bayes.
- ▹ Indépendance et contraires.
- ▹ Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire avec le noyau et l'image.
- ▹ Propriétés des projections.
- ▹ Propriétés des symétries.

A savoir faire

1. Savoir décomposer un évènement comme une union/intersection d'évènements plus simples.
2. Savoir appliquer la formule des probabilités composées.
3. Savoir appliquer la formule des probabilités totales en utilisant un SCE.
4. Connaître la notion d'indépendance et savoir l'utiliser pour calculer la probabilité d'une intersection.
5. Savoir montrer qu'une application est linéaire/est un endomorphisme.
6. Savoir déterminer une base du noyau/de l'image d'une application linéaire.
7. Savoir déterminer l'expression d'une projection, d'une symétrie.
8. Savoir vérifier qu'un endomorphisme est une projection/une symétrie et trouver ses sous-espaces caractéristiques.