

Intégration - Exercices

I. Calculs d'intégrales

Exercice I.1. Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$ 2. $\int_{-1}^1 (2t+1)e^{-t} dt$ 3. $\int_1^e t^n \ln(t) dt$ 4. $\int_1^x e^{2t} \sin(t) dt$ 5. $\int_0^1 \arctan(x) dx$ 6. $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x}} (u = \sqrt{1+x})$ | <ol style="list-style-type: none"> 7. $\int_0^1 \frac{\arcsin(t/2)}{\sqrt{4-t^2}} dt$ 8. $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$ 9. $\int_1^2 \frac{dt}{t+t \ln(t)}$ 10. $\int_1^x \frac{t+3}{t^2-2t+5} dt$ 11. $\int_1^x \frac{t^2-2t+3}{t^3-2t^2-t+2} dt$ |
|---|--|

II. Propriétés importantes de l'intégrale

Exercice II.1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{dt}{t^2 + \sqrt{t}}$.
On pourra faire un dessin pour s'aider...

Exercice II.2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice II.3. 1. En encadrant l'intégrande, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln 2$.
 2. Calculer les limites suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt$ | <ol style="list-style-type: none"> (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t} dt$ |
|---|--|

Exercice II.4. 1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.

2. En déduire que $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$.

3. Déterminer la limite et un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice II.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

1. Calculer u_0 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Calculer $u_n + u_{n+2}$.
4. Pour tout $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
 Exprimer S_n en fonction de u_0 et u_{2n+2} puis déterminer $\lim S_n$.

II. Propriétés importantes de l'intégrale

Exercice II.6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. En encadrant la fonction intégrée, montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
Exprimer u_n en fonction de I_0 et I_n .
4. Déterminer $\lim u_n$.

Exercice II.7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
3. Montrer par récurrence sur n qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $I_n = a_n e + b_n$.
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice II.8. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t) t^n dt$.
Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice II.9 (Wallis). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
2. Montrer que pour tout entier naturel, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
3. En déduire que :
 - (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.
 - (b) pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$.
4. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$, puis déterminer un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice II.10 (Lemme de Riemann-Lebesgue).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que : $\int_a^b f(t) e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice II.11 (Cauchy-Schwarz). Soit $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. En remarquant que la fonction $x \mapsto \int_a^b (xf(t) + g(t))^2 dt$ est polynomiale et positive sur \mathbb{R} , montrer que :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

Exercice II.12 (Centrale PC 2018). Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t) dt$.

1. Justifier que Φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\ker(\Phi)$ et $\text{Im}(\Phi)$.
3. Soit F un sev de E de dimension finie qui est stable par Φ . On note φ l'endomorphisme induit par Φ sur F .
Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(\text{id}, \varphi, \dots, \varphi^m)$ est liée.
4. En déduire que tous les éléments de F sont solutions d'une même EDL homogène à coefficients constants.
5. En déduire F .

Exercice II.13 (X PC 2018). Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n \int_0^1 x^n f(x) dx$.

1. Soit $\alpha \in [0, 1[$. Montrer que $\int_0^\alpha x^n f(x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. On suppose que $f(1) = 0$.

III. Sommes de Riemann

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \int_{\alpha}^1 x^n f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}$.

(b) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de I_n .

3. On ne suppose plus $f(1) = 0$. En se ramenant au cas précédent, déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice II.14 (TPE PSI 2018). Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1.$$

Exercice II.15. 1. Justifier que pour tout $x \geq -2$, $x^3 + 2x^2 + 1 > 0$.

2. Prouver que la fonction $f : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^3 + 2t^2 + 1}} dx$ est bien définie sur $[-2, +\infty[$ et est de classe \mathcal{C}^1 .

3. Montrer que f réalise une bijection de $[-2, 2]$ sur un intervalle I .

4. Justifier que f^{-1} est aussi de classe \mathcal{C}^1 sur I , que $0 \in I$ puis calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice II.16. Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(t) = \frac{\text{sh}(t)}{t}$ et $\varphi(0) = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$.

1. Justifier que f est bien définie sur \mathbb{R} et étudier sa parité.

2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

3. Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

Exercice II.17 (Centrale PSI 2018). 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y(x) \in \mathbb{R}$ tel que $\int_x^{y(x)} e^{t^2} dt = 1$.

2. Justifier que la fonction y est monotone.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$. Justifier que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et bijective (on précisera le domaine d'arrivée).

4. En déduire que y est continue et dérivable. Donner une expression simple de sa dérivée en fonction de x et $y(x)$.

5. En encadrant $\int_x^{y(x)} e^{t^2} dt$, déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe représentative de y lorsque x est au voisinage de $+\infty$.

III. Sommes de Riemann

Exercice III.1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$ en étudiant les sommes de Riemann de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Exercice III.2. Calculer les limites des suites :

$$1. u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+3\frac{k}{n}}$$

$$2. v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{2^k}$$

$$3. w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

Exercice III.3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k}{2n}\right) - f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \right)$.

2. En déduire que $A_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3. Montrer alors que (A_n) converge vers 0.

IV. Taylor-Lagrange

Exercice IV.1. 1. Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$. En déduire la limite de $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. En appliquant TL à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, calculer la limite de la suite $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.