Applications linéaires - Exercices

I. Linéarité, noyau, image

Exercice I.1. Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle linéaire ?

1. $f(x,y) = (x+2y, -x-y)$
2. $f(x,y,z,t) = (x-2z, 3t, x+y+t)$
3. $f(x,y,z) = (z+y, xy, x)$
4. $f(x,y,z) = (x+y, z, 1+y+z)$

Exercice I.2. 1. Soit $F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$. Montrer que F est un sev de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. Retrouver le résultat de la question précédente à l'aide de l'application $\phi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(f) = f(1) - f(0)$.

Exercice I.3. Dans chacun des cas suivants, montrer que φ est linéaire.

1. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F}([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array} \right.$
2. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$
3. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array} \right.$
4. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right.$, où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est fixée.
5. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & R \end{array} \right.$, où R est le reste de la division euclidienne de P par X^2+1.

Exercice I.4. Montrer que les applications suivantes sont linéaires, puis en déterminer le noyau et l'image.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (4x, y-x, 2x+y) \end{array} \right.$
2. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y-z, x-y) \end{array} \right.$

Exercice I.5. Soit $u : \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui à la fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ associe la fonction $u(f) : x \mapsto xf(x)$.
Montrer que u est linéaire puis étudier son injectivité et sa surjectivité.

Exercice I.6. 1. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

   (a) Montrer que $\ker(f) \subset \ker(g\circ f)$ et $\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

   (b) Montrer que $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff \mathrm{Im} f \subset \ker g$.

2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{id}_E = 0$.

   (a) Montrer que f est un automorphisme.

   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \subset \ker(f - \mathrm{id}_E)$.

   (c) Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.

Exercice I.7. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que : $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$.
2. Montrer que : $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \iff \ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$.

Exercice I.8. Soient f et g deux endomorphisme d'un espace vectoriel E qui commutent. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice I.9. Soit E un espace vectoriel et F, G deux sev de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$u(F) = u(G) \iff F + \ker(u) = G + \ker(u).$$

Exercice I.10. 1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit $\phi(P) = XP' - P$.

   (a) Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Déterminer le noyau et l'image de ϕ.

   (c) Vérifier que $\ker(\phi) \oplus \mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}_2[X]$.

   (d) Est-ce que ϕ est un projecteur ? une symétrie ?

2. Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on définit $f(P) = P + (1-X)P'$.

   (a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

   (b) Déterminer le noyau de f.

II. Homothéties, projecteurs, symétries

Exercice II.1. 1. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\vec{v} = (-1,1,2)$, $D = \mathrm{Vect}(\vec{v})$ et $P = \ker(f)$, où f est la forme linéaire définie sur E par $f(x,y,z) = x+2y-z$.

   (a) Montrer que P et D sont en somme directe.

   (b) Justifier que P et D sont supplémentaires.

   (c) Déterminer l'expression des projections $\pi_{D,P}$ et $\pi_{P,D}$.

2. Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(1) = P''(1) = 0\right\}$.

   (a) Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Déterminer le projeté du polynôme $X^2 + X + 1$ sur F parallèlement à G, puis son symétrique par rapport à F parallèlement à G.

Exercice II.2. 1. Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $p(x,y,z) = (-5x+10y-10z, -6x+11y-10z, -3x+5y-4z)$.

   (a) Montrer que p est linéaire.

   (b) Montrer que p est une projection sur un sev F parallèlement à un sev G et déterminer F et G.

2. Soit $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $s(x,y,z) = (x, -2x+y+2z, 2x-z)$.

   (a) Montrer que s est linéaire.

   (b) Montrer que s est une symétrie par rapport à un sev F parallèlement à un sev G et déterminer F et G.

Exercice II.3. 1. Soit $n \geq 1$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ en utilisant une symétrie bien choisie.

2. Soit $I = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est impaire}\}$ et $P = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est paire}\}$. En utilisant une symétrie, montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P \oplus I$.

Exercice II.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $p = \dfrac{1}{2}(\mathrm{id}_E + f)$. Montrer que p est un projecteur ssi f est une symétrie.

Exercice II.5. Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $x \in \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \iff f(x) = \lambda x$.
2. On pose $E_\lambda = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$. Justifier que E_λ est stable par f.
3. Que dire de $f_{|E_\lambda}$?

Exercice II.6. Soit p un projecteur de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $u \circ p + p \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $u \circ p = p \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice II.7. Soit $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$. Montrer que p et q sont deux projecteurs de même noyau.

III. Dimension finie

Exercice III.1. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = XP - P'$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\ker(f)$.
3. f est-elle injective ? surjective ?
4. Reprendre les questions avec $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $\phi(P) = (X+1)P - (X^2-1)P'$.

Exercice III.2. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $J(P) = P(X+1) - P(X)$ et $L(P) = XP' - 2P$.

1. Montrer que J est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et L est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer $\ker(J)$ et $\mathrm{Im}(J)$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(L)$, puis $\mathrm{rg}(L)$, $\dim(\ker(L))$ et enfin $\ker(L)$.

Exercice III.3. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (z, x-y, y+z)$ est un automorphisme.

Exercice III.4. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit l'application $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ par $\varphi(e_1) = e_1 + e_2$, $\varphi(e_2) = e_1 - e_2$ et $\varphi(e_3) = e_1 + \lambda e_3$.

1. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Exprimer $\varphi(u)$ en fonction de x, y et z.
2. Comment choisir λ pour que φ soit injective ? surjective ?

Exercice III.5. Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n$.

1. Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Montrer que l'application $\varphi : u \in E \mapsto (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme.
3. En déduire la dimension de E puis une base de E.

Exercice III.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels distincts. On définit l'application ϕ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par : $\phi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$.

1. Justifier que ϕ est linéaire.
2. Montrer que ϕ est un isomorphisme.
3. En déduire que pour tout $(n+1)-$uplet $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ de réels, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $P(a_0) = b_0, P(a_1) = b_1, \dots, P(a_n) = b_n$.

Exercice III.7. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f est nilpotent et on pose p le plus petit entier naturel tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
2. Comparer n et p et en déduire que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice III.8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que : $\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}^* \mid u^p(x) = 0_E$. Montrer que u est nilpotent.

Exercice III.9. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et f un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid f(x) = \lambda x$.
On veut montrer que f est une homothétie. Pour cela, on prend $x_0 \in E$ un vecteur non nul et $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ tel que $f(x_0) = \lambda_0 x_0$.

1. Que doit-on montrer ?
2. Soit $y \in E$ tel que (x_0, y) est liée. Déterminer $f(y)$.
3. Soit $y \in E$ tel que (x_0, y) est libre. Montrer que $f(y) = \lambda_0 y$.
4. Conclure.

Exercice III.10. Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une forme linéaire sur E. On prend $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.

1. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Vect}(a)$.
2. On suppose que $f(a) = 1$ et on pose pour tout $x \in E$, $p(x) = f(x)a$.
   Montrer que p est un projecteur de E et déteminer ses éléments caractéristiques.

Exercice III.11. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$ et en déterminer une base.

Exercice III.12. Soit $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

1. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K})$ une forme linéaire telle que pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $\varphi((X-a)P) = 0$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\varphi(P) = \lambda P(a)$.
2. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K})$ une forme linéaire telle que pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$, $\varphi((X-a)^2 P) = 0$.
   Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\varphi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$.

Exercice III.13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ une forme linéaire. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$.

Exercice III.14. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Exercice III.15 (Mines-Ponts PC 2018). Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$f + g = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq \dim(E).$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g) = E$.
2. Justifier que $f \circ g = g \circ f$ et en déduire que : $\forall x \in E$, $f \circ g(x) = 0$
3. Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice III.16 (CCP PSI 2018). Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ définie par $\varphi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Comparer le degré de P avec celui de $\varphi(P)$.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. Étudier la surjectivité de φ.

Exercice III.17 (Mines-Ponts PC 2018). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) = 0 \right\}$.

1. Montrer que A est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa dimension.
2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer $A \cap \mathrm{Vect}(1, (X-1)^k)$.
3. Donner une base de A.

Exercice III.18 (X PC 2018). Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Montrer que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^2) \iff E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Indications - Solutions

Exercice I.1 :

1. Oui
2. Oui
3. Non : $f(2,2,2) \neq 2f(1,1,1)$ par exemple.
4. Non, $f(0,0,0) \neq (0,0,0)$.

Exercice I.2 :

1. On vérifie que la fonction nulle est dans F, puis si on fait une CL de deux fonctions dans F le résultat est encore dans F.
2. L'application $\phi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est linéaire et $F = \ker(\phi)$.

Exercice I.3 : On applique simplement la définition.
Exercice I.4 : On applique la définition pour la linéarité, puis on résout un système pour trouver le noyau et l'image.

1. $\ker(f) = \{(0,0)\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x+4y-4z=0\} = \mathrm{Vect}((-4,3,0),(4,0,3))$.
2. $\ker(g) = \mathrm{Vect}((1,1,3))$ et $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$.

Exercice I.5 : On vérifie facilement que u est linéaire. Pour l'injectivité, on prend $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $u(f) = 0_{\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xf(x) = 0$, donc $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^*$. Par continuité, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, donc $f(0) = 0$. Ainsi, u est injective.
L'application u n'est pas surjective car la fonction constante égale à 1 est dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mais pas dans l'image de u car elle ne vaut pas 0 en 0.
Exercice I.6 :

1. (a) Soit $x \in \ker(f)$. Alors $g\circ f(x) = g(f(x)) = g(0_F) = 0_G$, donc $x \in \ker(g\circ f)$ et $\ker(f) \subset \ker(g\circ f)$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(g\circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(f(x))$, donc $y \in \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
   (b) Supposons que $g\circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Alors, pour tout $y \in \mathrm{Im}\, f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $g(y) = g(f(x)) = 0$ et $y \in \ker(g)$. Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}\, f \subset \ker(g)$. Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $f(x) \in \ker(g)$ et $g(f(x)) = 0$, donc $g\circ f = 0$.
2. (a) $f(f-3\,\mathrm{id}_E) = -2\,\mathrm{id}_E$, donc $f(\frac{3}{2}\mathrm{id}_E - \frac{1}{2}f) = \mathrm{id}_E$ et f est un automorphisme d'inverse $f^{-1} = \frac{3}{2}\mathrm{id}_E - \frac{1}{3}f$.
   (b) $(f-2\,\mathrm{id}_E)\circ(f-\mathrm{id}_E) = (f-\mathrm{id}_E)\circ(f-2\,\mathrm{id}_E) = f^2 - f - 2f + 2\,\mathrm{id}_E = f^2 - 3f + 2\,\mathrm{id}_E = 0$, puis on applique la première question.
   (c) Soit $x \in \ker(f-\mathrm{id}_E) \cap \ker(f-2\,\mathrm{id}_E)$, alors $f(x) = x$ et $f(x) = 2x$, donc $x = 0$. De plus, si $x \in E$, $f^2(x) - 3f(x) + 2x = 0$, donc $-(f(f(x)) - 2f(x)) + f(x) - x = x$ et $x = (f-\mathrm{id}_E)(x) - (f-2\,\mathrm{id}_E)(f(x))$.

Exercice I.7 :

1.
   - $\Rightarrow$: supposons que $\ker(u) = \ker(u^2)$. Prenons $x \in \ker(u)\cap\mathrm{Im}(u)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Donc $u(x) = u^2(y) = 0_E$ car $x \in \ker(u)$. Donc $y \in \ker(u^2) = \ker(u)$ et $u(y) = 0_E$. Donc $x = 0_E$. D'où $\ker(u)\cap\mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$.
   - $\Leftarrow$: supposons que $\ker(u)\cap\mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$. On a déjà $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ (voir exercice I.6). Prenons donc $x \in \ker(u^2)$. Posons $y = u(x)$. Alors $y \in \mathrm{Im}(u)$ et $u(y) = 0_E$, donc $y \in \ker(u)$. Donc $y = 0_E$. Ainsi, $u(x) = 0_E$ et $x \in \ker(u)$. D'où $\ker(u) = \ker(u^2)$.
2.
   - $\Rightarrow$: supposons que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$. Prenons $x \in E$. Alors $y = u(x) \in \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$. Donc il existe $z \in E$ tel que $u(x) = u^2(z)$. Donc $u(x-u(z)) \in \ker(u)$. Il existe $t \in \ker(u)$ tel que $x - u(z) = t$ et $x = t + u(z) \in \ker(u)+\mathrm{Im}(u)$. On a bien $E = \ker(u)+\mathrm{Im}(u)$.
   - $Leftarrow$: supposons que $\ker(u)+\mathrm{Im}(u) = E$. On a toujours $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$ (voir exercice I.6). Prenons donc $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Comme $E = \ker(u)+\mathrm{Im}(u)$, il existe $t \in \ker(u)$ et $z \in E$ tels que $x = t + u(z)$. Donc $y = u(t+u(z)) = u^2(z) \in \mathrm{Im}(u^2)$. On a bien $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$.

Exercice I.8 : Soit $x \in \ker(f)$. Alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$, donc $g(x) \in \ker(f)$, et $\ker(f)$ est stable par g.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Im}(f)$ est stable par g.
Exercice I.9 :

- $\Rightarrow$: Supposons que $u(F) = u(G)$. Prenons $x = x_F + x_K \in F + \ker(u)$. Alors $u(x) = u(x_F) \in u(F) = u(G)$, donc il existe x_G tel que $u(x) = u(x_G)$ et $u(x - x_G) = 0_E$: $x - x_G \in \ker(u)$. Donc $x = x_G + (x - x_G) \in G + \ker(u)$. Donc $F + \ker(u) \subset G + \ker(u)$. On raisonne de même pour l'inclusion réciproque.
- $\Leftarrow$: Supposons que $F + \ker(u) = G + \ker(u)$. Prenons $y = u(x) \in u(F)$. Alors $x \in F + \ker(u)$, donc $x = x_G + x_K \in G + \ker(u)$ et $y = u(x_G) \in u(G)$. Donc $u(F) \subset u(G)$. On procède de même pour l'inclusion réciproque.

Exercice I.10 :

1. (a) On applique la définition. On vérifie ensuite que les degrés vont bien.
   (b) On résout $XP' - P = 0$. On trouve $\ker(\phi) = \mathrm{Vect}(X)$. Puis, pour $P = aX^2 + bX + c$, on trouve $\phi(P) = aX^2 - c$. Donc $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}(X^2, 1)$.
   (c) Immédiat.
   (d) Non dans les deux cas en calculant $\phi\circ\phi$.
2. (a) Pour montrer que f est linéaire, on applique la définition. Il faut aussi voir que $\deg(f(P)) \le 3$. Or, $\deg(P + (1-X)P') \le \max(\deg(P), \deg((1-X)P'))$ et $\deg(P) \le 3$ et $\deg((1-X)P') = 1 + \deg(P') = \deg(P) \le 3$.
   (b) On résout $P + (1-X)P' = 0$ pour le noyau. On trouve $\ker(f) = \mathrm{Vect}(X-1)$.

Exercice II.1 :

1. (a) Si $(x,y,z) \in P \cap D$, alors $(x,y,z) = \lambda(-1,1,2)$ et $-\lambda + 2\lambda - 2\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$.
   (b) Soit $(x,y,z) \in E$. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in P$ tels que $(x,y,z) = \lambda(-1,1,2) + p \iff (x+\lambda, y-\lambda, z-2\lambda) \in P$. En remplaçant dans l'équation on trouve $(x+\lambda, y-\lambda, z-2\lambda) \in P$, donc $x+\lambda+2(y-\lambda)-(z-2\lambda) = 0$, d'où $\lambda = z-x-2y$. Ainsi, (x,y,z) est bien dans la somme $P \oplus D$.
   (c) D'après la question précédente, $\Pi_{D,P}(x,y,z) = (x+2y-z, -x-2y+z, -2x-4y+2z)$. Puis $\Pi_{P,D}(x,y,z) = (x,y,z) - \Pi_{P,D}(x,y,z) = (z-2y, x+3y-z, 2x+4y-z)$.
2. (a) Si $P \in F \cap G$, alors P a une racine de multiplicité 3, donc est nul. On écrit ensuite $P \in \mathbb{R}_2[X]$ comme $P = (X-1)Q + R$, avec $\deg(R) \leq 0$.
   (b) On écrit $X^2 + X + 1 = (X-1)(X+2) + 3$ en faisant la division euclidienne. Or $(X-1)(X+2) \in F$ et $3 \in G$. Donc $(X-1)(X+2)$ est le projeté de X^2+X+1 sur F et $(X-1)(X+2) - 3$ est son symétrique.

Exercice II.2 :

1. (a) On applique la définition.
   (b) On vérifie que $p \circ p = p$. Puis, $F = \mathrm{Im}(p) = \{3x - 5y + 5z = 0\} = \mathrm{Vect}((5,3,0),(-5,0,3))$ et $G = \ker(p) = \mathrm{Vect}((2,2,1))$.
2. (a) On applique la définition.
   (b) On vérifie que $s \circ s = \mathrm{id}$. Puis, $F = \ker(s - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((0,1,0),(1,0,1))$ et $G = \ker(s + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((0,1,-1))$.

Exercice II.3 :

1. On considère $s : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to M^\top \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'application s est bien linéaire (voir cours sur le calcul matriciel), et $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$: s est une symétrie vectorielle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. C'est la symétrie par rapport à $F = \ker(s - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})})$ parallèlement à $G = \ker(s + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})})$. Or $M \in F \iff M^\top - M = 0 \iff M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et de même $G = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. On a donc bien $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
2. On considère $s : (x \mapsto f(x)) \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mapsto (x \mapsto f(-x)) \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$. C'est bien une symétrie et $I = \ker(s + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^\mathbb{R}})$ et $P = \ker(s - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^\mathbb{R}})$.

Exercice II.4 : $p \circ p - p = \dfrac{1}{4}(\mathrm{id}_E + f) \circ (\mathrm{id}_E + f) - \dfrac{1}{2}(\mathrm{id}_E + f) = -\dfrac{1}{4}\mathrm{id}_E + \dfrac{1}{4}f^2$. Donc $p \circ p = p \iff -\dfrac{1}{4}\mathrm{id}_E + \dfrac{1}{4}f^2 = 0 \iff \mathrm{id}_E = f^2$.

Exercice II.5 :

1. Soit $x \in E$. $x \in \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \iff (f - \lambda\,\mathrm{id}_E)(x) = 0_E \iff f(x) = \lambda x$.
2. Soit $x \in E_\lambda$. Alors $f(x) = \lambda x$, mais comme E_λ est un sev de E, $\lambda x \in E_\lambda$. Donc E_λ est stable par f.
3. Soit $x \in E_\lambda$. Alors $f(x) = \lambda x$, donc $f_{|E_\lambda}$ est une homothétie de rapport λ.

Exercice II.6 : Supposons que $u \circ p + p \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Alors en composant par p à gauche, $p \circ u \circ p + p \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (car $p^2 = p$), puis en composant à droite : $2p \circ u \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc $p \circ u \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. En revenant à l'égalité précédente, $p \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$, et en revenant à la première, $u \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice II.7 :

- $p^2 = (p \circ q)^2 = p \circ (q \circ p) \circ q = (p \circ q) \circ q = p \circ q = p$. Comme p est un endomorphisme de E qui vérifie $p^2 = p$, c'est un projecteur. On procède de même avec q.
- Soit $x \in \ker(p)$. Alors $q(x) = q(p(x)) = q(0_E) = 0$, donc $x \in \ker(q)$. D'où $\ker(p) \subset \ker(q)$. On procède de même pour l'inclusion réciproque.

Exercice III.1 :

1. On applique simplement la définition.
2. Comme $f(1) = X$, $f(X) = X^2 - 1$ et $f(X^2) = X^3 - 2X$, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X, X^2-1, X^3-2X)$. Cette famille est libre car elle est échelonnée en degrés.
   On résout $f(P) = 0 \iff aX^3 + bX^2 + cX - 2aX - b = 0 \iff a = 0, b = 0, c = 0$, donc $\ker(f) = \{0\}$.
3. f est injective car $\ker(f) = \{0\}$, mais n'est pas surjective car $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 < 4$.
4. On trouve $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}(X+1, -X^3 + X^2 + 2X)$ et $\ker(\phi) = \mathrm{Vect}(X-1)$. Donc ϕ n'est pas injective ni surjective.

Exercice III.2 :

1. On applique la définition pour la linéarité. Il faut ensuite voir que $\deg(P(X+1) - P(X)) < \deg(P(X))$ et que $\deg(XP' - 2P) \leq \deg(P)$.
2. $P \in \ker(J) \iff P(X+1) = P(X) \iff P =$constante, donc $\ker(J) = \{\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Donc $\dim(\ker(J)) = 1$ et d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(J) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\ker(J)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$, donc $\mathrm{Im}(J) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Soit $P = X^k$. Alors $L(P) = (k-2)X^k$. Ainsi $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{Vect}(-2, -X, X^3, \ldots, (n-2)X^n)$, et $\mathrm{rg}(L) = n$, et $\dim(\ker(L)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \mathrm{rg}(L) = 1$. On remarque que $L(X^2) = 0$, donc $\ker(L) = \mathrm{Vect}(X^2)$ par dimension.

Exercice III.3 : En résolvant le système, on voit que $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$, et comme f est un endomorphisme en dimension finie, elle est automatiquement un automorphisme.

Exercice III.4 :

1. $\varphi(u) = x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) + z\varphi(e_3) = (x+y+z)e_1 + (x-y)e_2 + \lambda z e_3$.
2. Comme φ est un endomorphisme en dimension finie, si elle est injective, elle est automatiquement surjective. En échelonnant la matrice associée, on trouve $\ker(f) = \{0\} \iff \lambda \neq 0$.

Exercice III.5 :

1. - La suite nulle vérifie bien la relation de récurrence.

- Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda u + v)_{n+3} = \lambda u_{n+3} + v_{n+3} = \lambda(4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n) + 4v_{n+2} - v_{n+1} - 6v_n = 4(\lambda u + v)_{n+2} - (\lambda u + v)_{n+1} - 6(\lambda u + v)_n$. Donc $\lambda u + v \in E$.

Ainsi, E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. On vérifie facilement que φ est linéaire.
   - Injectivité : $u \in \ker(\varphi) \iff u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0$. On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Donc $\ker(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$: φ est injective.
   - Surjectivité : On prend $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on montre alors par récurrence qu'il existe $(u_n) \in E$ telle que $u_0 = a$ et $u_1 = b$ et $u_2 = c$. Donc φ est surjective.
3. On a donc $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Deux façons pour trouver une base :
   - soit on prend les antécédents de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on cherche une formule pour ces trois suites.
   - soit on cherche une suite sous la forme $u = (r^n) \in E$: on trouve $r = -1$, $r = 2$ et $r = 3$. Donc $((-1)^n)$, (2^n) et (3^n) sont trois suites dans E. On vérifie qu'elle sont libres.

Exercice III.6 :

1. On applique simplement la définition.
2. Comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, il suffit de vérifier que ϕ est injective. Or $P \in \ker(\phi) \iff P(a_0) = P(a_1) = \ldots = P(a_n) = 0$ donc P a $n+1$ racines, et $P = 0$.
3. C'est la définition de la bijectivité !

Exercice III.7 :

1. Comme p est le plus petit entier tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on a $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On prend $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$. Montrons que $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre. Prenons $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum\limits_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0_E$. On compose avec f^{p-1} l'égalité précédente : il reste $\lambda_0 f^{p-1}(x) = 0_E$, donc $\lambda_0 = 0$. On procède alors par récurrence sur $k \in [\![0, p-1]\!]$ pour montrer que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = 0$.
2. Comme la famille est de cardinal p et est libre, on a $p \leq n$. Donc $f^n = f^p \circ f^{n-p} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice III.8 : Comme E est de dimension finie, il existe une base $\mathscr{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ de E. On a donc $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u^{p_i}(x_i) = 0_E$. Prenons $p = \max\{p_1, \ldots, p_n\}$. Soit $x \in E$ et notons $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Alors $u^p(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u^p(x_i) = 0_E$ par définition de p. Ainsi, $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc u est nilpotent.

Exercice III.9 :

1. On doit montrer que : $\forall y \in E$, $f(y) = \lambda_0 y$.
2. Comme $x_0 \neq 0_E$ et (x_0, y) est liée, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x_0$. Donc $f(y) = \mu f(x_0) = \mu \lambda_0 x_0 = \lambda_0 y$.
3. Il existe λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que $f(x_0 + y) = \lambda_1(x_0 + y)$ et $f(y) = \lambda_2 y$. Or $f(x_0 + y) = f(x_0) + f(y) = \lambda_0 x_0 + \lambda_2 y$, donc par liberté, $\lambda_1 = \lambda_0 = \lambda_2$. Donc $f(y) = \lambda_0 y$.
4. On a bien montré que f est une homothétie de rapport λ_0.

Exercice III.10 :

1. Soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Vect}(a)$. Alors $x = \lambda a$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f(x) = 0$. Donc $\lambda f(a) = 0$ et $\lambda = 0$. Ainsi, $\ker(f)$ et $\mathrm{Vect}(a)$ sont en somme directe.
   De plus, comme f est non nulle, $\dim(f) = n-1$ et $\dim(\mathrm{Vect}(a)) = 1$, donc $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Vect}(a)$ par dimension.
2. p est un endomorphisme de E. De plus, si $x \in E$, alors $p \circ p(x) = p(f(x)a) = f(x)p(a) = f(x)f(a)a = f(x)a = p(x)$. Donc $p \circ p = p$ et p est un projecteur.
   $\ker(p) = \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Vect}(a)$ et on a égalité par dimension.

Exercice III.11 : Soit $\varphi : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto P(\alpha)\mathbb{C}$. On vérifie que φ est une forme linéaire. Elle est non nulle car $\varphi(1) \neq 0$. Donc $H = \ker(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$. Les polynômes $X - a, (X-a)X, \ldots, (X-a)X^n$ sont tous dans H et forment une famille libre (car échelonnée en degrés. Comme cette famille est de cardinal $n-1$, c'est une base de H.

Exercice III.12 :

1. Prenons $P \in \mathbb{K}_n[X]$. En faisant la division euclidienne de P par $X - a$, on obtient, $P = P(a) + (X-a)Q$. Donc $\varphi(P) = \varphi(P(a)) = P(a)\varphi(1)$. Ainsi, $\lambda = \varphi(1)$.
2. Prenons $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On utilise la formule de Taylor : $P = P(a) + P'(a)(X-a) + (X-a)^2 Q$. Donc $\varphi(P) = P(a)\varphi(1) + P'(a)\varphi(X-a)$. Ainsi, $\lambda = \varphi(1)$ et $\mu = \varphi(X-a)$.

Exercice III.13 : On raisonne par analyse-synthèse :

- Analyse : supposons que la matrice A convienne. Alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\varphi(E_{i,j}) = \mathrm{tr}(AE_{i,j}) = a_{i,j}$. Donc on a $a_{i,j} = \varphi(E_{i,j})$.
- Synthèse : soit $A = (\varphi(E_{i,j}))_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$. On vérifie que $M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$ est linéaire. Alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(E_{i,j}) = \mathrm{tr}(AE_{i,j})$: les applications linéaire φ et $M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$ coïncident sur une base donc sont égales.

Exercice III.14 : On montre d'abord $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$: soit $y \in \mathrm{Im}(f+g)$, il existe $x \in E$ tel que $(f+g)(x) = y$, donc $y = f(x) + g(x) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
Puis $\mathrm{rg}(f+g) \leq \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g)) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Exercice III.15 :

1. Soit $x \in E$. Alors $f(x) + g(x) = x$, donc $x \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$, et $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
   Ainsi, $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \geq \dim(E)$, donc il y a égalité. Ainsi, $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.
2. En composant $f + g = \mathrm{id}_E$ à gauche par f, on trouve $f \circ g = f - f \circ f$. En composant à droite, $g \circ f = f - f \circ f$. On a bien $f \circ g = g \circ f$.
   Soit $x \in E$. Alors $f \circ g(x) \in \mathrm{Im}(f)$ et $g \circ f(x) \in \mathrm{Im}(g)$. Donc $f \circ g(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_E\}$. D'où $f \circ g(x) = 0$.
3. Comme $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on a $f - f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc f est un projecteur. De même pour g.

Exercice III.16 :

1. Prenons $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Alors $\varphi(X^n) = a(X+1)^n + a(X-1)^n - 2aX^n$ est de degré $n-2$ (en développant avec Newton). De plus, $\varphi(X) = 0$ et $\varphi(1) = 0$. Ainsi, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, si $\deg(P) \geq 2$, alors $\deg(\varphi(P)) = \deg(P) - 2$ et si $\deg(P) \leq 1$, $\deg(\varphi(P)) = -\infty$.
2. D'après la question précédente, $P \in \ker(\varphi) \iff \deg(\varphi(P)) = -\infty \iff \deg(P) \leq 1$. Donc $\ker(\varphi) = \mathbb{K}_1[X]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec n. L'application $\varphi_{|\mathbb{K}_{n+2}[X]}$ est à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$. Par dimension, elle est surjective sur $K_n[X]$. Ainsi, si $P \in \mathbb{K}[X]$, et $n = \deg(P)$, alors il existe $Q \in \mathbb{K}_{n+2}[X]$ tel que $\varphi(Q) = P$: φ est surjective.

Exercice III.17 :

1. L'application $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1) \in \mathbb{R}$ est une forme linéaire, non nulle car $\varphi(1) \neq 0$. Donc $A = \ker(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, donc de dimension n.
2. Prenons $P = \lambda + \mu(X-1)^k$. Alors, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $P^{(j)} = \dfrac{k!}{(k-j)!}(X-1)^{k-j}$, donc $P^{(j)}(1) = 0$ si $j \neq k$ et $P^{(k)}(1) = k!$. Donc $\varphi(P) = \lambda + \mu k! = 0 \iff \lambda = -\mu k!$. Donc $A \cap \mathrm{Vect}(1, (X-1)^k) = \mathrm{Vect}(-k! + (X-1)^k)$.
3. La famille $(-k! + (X-1)^k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est échelonnée en degrés, donc libre et de cardinal n. C'est donc une base de A.

Exercice III.18 : Remarquons déjà qu'on a toujours $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ (exercice I.6). On a égalité ssi $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^2)$ et $\dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u^2))$. Mais ces deux dernière égalités sont les mêmes d'après le théorème du rang.
Ainsi $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^2) \iff \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$ et $\ker(u) = \ker(u^2)$. Or on a vu dans l'exercice I.7 que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \iff \ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$ et $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$.
Ainsi $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^2) \iff \ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$ et $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\} \iff E = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u)$.