Devoir Surveillé 08

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Du cours).

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $p \in [\![2, n]\!]$.
   Établir la relation $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$ en comptant les parties à p éléments de $[\![1, n]\!]$ de deux façons différentes.
2. Énoncer le théorème de la base extraite.
3. Donner la définition d'hyperplan.
4. Donner la définition du rang d'une famille de vecteurs.
5. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 et F et G deux sev de E avec $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 2$. Montrer que soit $F \subset G$, soit $F \oplus G = E$.
6. Soit $n \geq 1$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{ij}$.
   (b) Montrer que $\mathscr{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
   (c) Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{L}$.
7. Donner la définition de deux événements indépendants.
8. Énoncer la formule des probabilités composées puis la démontrer.
9. (a) Donner la définition de système complet d'événements puis énoncer la formule des probabilités totales.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a n urnes numérotées de 1 à n et l'urne i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on tire successivement deux boules avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce truquée $2n$ fois. La probabilité que la pièce donne face est $\frac{2}{3}$.
    (a) Exprimer A : « on obtient une alternance parfaite de piles et de faces », B : « on obtient un seul pile » et C : « on n'a jamais pile suivi de face » à l'aide d'événements plus simples.
    (b) Calculer les probabilités de A et de B.
11. Donner la définition de forme linéaire.
12. Donner la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire.
13. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev. Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.
    Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ et $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$.

Exercice 2 (Deux dés).

1. Soit $d \in \mathbb{R}$ un réel. Déterminer une équation de la droite de $\mathbb{R}^2$ qui passe par les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(2, d)$. On la mettra sous la forme $y = f(x)$.

On rappelle qu'un point de coordonnées (x, y) est au-dessus de la droite d'équation $y = f(x)$ si et seulement si $y \geq f(x)$.
On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on note d le résultat. On lance un deuxième dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on note e le résultat.

2. Décrire l'univers Ω de l'expérience aléatoire et la probabilité $\mathbb{P}$ sur cet univers.

On note A : « le point de coordonnées $(3, e)$ est au-dessus de la droite passant par les points $(1, 1)$ et $(2, d)$ ».

3. Déterminer le cardinal de l'ensemble $\{(a, b) \in [\![1, 6]\!]^2 \mid a \geq 2b - 1\}$.
4. Déterminer la probabilité de A.

Exercice 3 (Projections et symétries).
Soit $E = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 2, 3)$. On pose $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \text{Vect}(e_3)$.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = z$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
2. Montrer que f est une forme linéaire.
3. Justifier que $F = \ker(f)$.
4. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer la projection de u sur F parallèlement à G.
5. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le symétrique de u par rapport à G parallèlement à F.

Exercice 4 (Un endomorphisme).
On pose $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $u \in E$, on pose $g(u) = u'' - 2u' + 2u$.

1. Montrer que g est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\ker(g - 2\,\text{id}_E)$.
3. Déterminer une base de $\ker(g)$.

Exercice 5 (Deux pièces).
On dispose de deux pièces de monnaie : la pièce C donne face avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la pièce D avec probabilité $\frac{2}{3}$.
On choisit une des deux pièces au hasard et on la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer pour le prochain lancer, sinon on change de pièce. On effectue avec cette règle une suite de lancers.
On suppose la situation correctement modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ qu'on ne cherchera pas à connaître.
Soit D_n l'événement « on joue avec la pièce D au n-ième lancer » et $p_n = \mathbb{P}(D_n)$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2}$.
2. Exprimer p_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Que vaut $\lim p_n$? Commenter : le fait que cette limite soit strictement supérieure à $\frac{1}{2}$ vous parait-il normal ?

Exercice 6 (Des probabilités).
A Westeros, les Stark et les Lannister périssent les uns après les autres. La population des Stark et des Lannister est suffisamment importante pour que la population de chaque famille reste stable malgré tout (inutile d'être réaliste !).
La probabilité pour qu'un Stark meure est de $\frac{2}{3}$, celle pour que ce soit un Lannister est de $\frac{1}{3}$. On supposera qu'une seule personne meurt à la fois et que les morts sont indépendantes.
Pour $n \geq 2$, on note E_n l'événement « deux Stark sont morts à la suite, pour la première fois et ce sont les $n-1$-ième et n-ième morts ». On note $u_n = \mathbb{P}(E_n)$.
Pour $n \geq 1$, on appelle S_n l'événement « un Stark est le n-ième mort », et L_n l'événement « un Lannister est le n-ième mort ».

1. Calculer u_2.
2. Exprimer les événements E_3 et E_4 en fonction des événements $(L_i)_{1\leq i\leq 4}$ et $(S_i)_{1\leq i\leq 4}$.
   En déduire u_3 et u_4.
3. Calculer $\mathbb{P}_{L_1}(E_4)$ et $\mathbb{P}_{S_1\cap L_2}(E_4)$.
4. Soit $n \geq 4$. Expliquer pourquoi $\mathbb{P}_{L_1}(E_n) = u_{n-1}$.
5. Exprimer de même $\mathbb{P}_{S_1\cap L_2}(E_n)$ et $\mathbb{P}_{S_1\cap S_2}(E_n)$.
6. Montrer que : $\forall n \geq 4,\ u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + \frac{2}{9}u_{n-2}$.
7. Donner pour tout $n \geq 2$ l'expression explicite de u_n en fonction de n.
8. Pour $n \geq 2$, calculer la probabilité p_n de $\bigcup_{i=2}^{n} E_i$ et préciser sa limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

Exercice 7 (Un autre endomorphisme).
Soit E un $\mathbb{R}$-ev non réduit à $\{0_E\}$. On prend $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$f^2 - 4f + 3\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. On suppose **dans cette question seulement** que f est une homothétie. Déterminer f.
3. On ne suppose plus que f est une homothétie.
   (a) Montrer que $p = \frac{1}{2}(f - \mathrm{id}_E)$ est un projecteur.
   (b) En déduire que $q = \frac{1}{2}(3\,\mathrm{id}_E - f)$ est également un projecteur.
   On pourra calculer $p+q$.
   (c) Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(f - 3\,\mathrm{id}_E)$.
   (d) Exprimer f en fonction de p et q.
   (e) Déterminer f^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en fonction de p, q et n.

Exercice 8 (Un vote).
On considère une élection dans laquelle se présentent uniquement deux candidats notés A et B.
Les bulletins sont dépouillés un par un.
On suppose que A est élu avec m voix contre n pour B ($m+n$ suffrages exprimés avec $m>n$). Un dépouillement peut être représenté par un mot de l'alphabet $\{A, B\}$ correspondant à l'ordre dans lequel sont dépouillés les bulletins. Par exemple, si A est élu avec 2 voix contre 1 voix pour B, nous avons 3 dépouillements possibles représentés par les mots suivants : AAB, ABA et BAA.
On note $\mathscr{P}$ la propriété : « le nombre de voix obtenues par A est strictement supérieur au nombre de voix obtenues par B pendant tout le dépouillement ».

1. Dans cette question, on suppose qu'il y a eu 5 suffrages exprimés avec 3 voix pour A et 2 pour B.
   (a) Déterminer le nombre de dépouillements possibles.
   (b) Ecrire les dépouillements vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.
2. On revient au cas général.
   (a) Justifier que le nombre de dépouillements possibles est égal à $\binom{m+n}{m}$.
   (b) Déterminer le nombre de dépouillements commençant par un bulletin pour le candidat B.
   (c) En déduire que le nombre de dépouillements vérifiant $\mathscr{P}$ est inférieur ou égal à $\binom{m+n-1}{m-1}$.

Correction du Devoir Surveillé 08

Correction de l'exercice 1 :

1. - Il y a $\binom{n}{p}$ parties à p éléments dans $[\![1,n]\!]$.
   - Lorsqu'on choisit une partie à p éléments de $[\![1,n]\!]$, 4 cas se présentent :
     - ▷ elle contient 1 et 2 et il reste $p-1$ éléments à choisir parmi $n-2$: il y en a $\binom{n-2}{p-1}$;
     - ▷ elle contient 2 mais pas 1 et il reste $p-1$ éléments à choisir parmi $n-2$: il y en a $\binom{n-2}{p-1}$;
     - ▷ elle ne contient ni 1 ni 2 et il reste p éléments à choisir parmi $n-2$ il y en a $\binom{n-2}{p}$.

     En tout il y en a $\binom{n-2}{p-2}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p}$.

   Ainsi, $\boxed{\binom{n}{p}=\binom{n-2}{p-2}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p}}$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors il existe une sous-famille de $\mathscr{G}$ qui est une base de E.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E)-1$.
4. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E. Le rang de $(u_1,\dots,u_n)$ est : $\mathrm{rg}(u_1,\dots,u_n)=\dim(\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n))$.
5. D'après la formule de Grassmann : $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$, donc $\dim(F+G)=3-\dim(F\cap G)$. Comme $F\cap G$ est un sev de F, il est de dimension inférieure ou égale à 1 :
   - si $\dim(F\cap G)=1$, alors $F=F\cap G$, donc $F\subset G$;
   - si $\dim(F\cap G)=0$, alors $F\cap G=\{0_E\}$ donc F et G sont en somme directe, et $\dim(F\oplus G)=3=\dim(E)$, donc $F\oplus G=E$.

   Ainsi, on a bien $\boxed{\text{soit } F\subset G, \text{ soit } F\oplus G=E}$.
6. (a)
   - Analyse : soit $L_i\in\mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall j\in[\![0,n]\!]$, $L_i(a_j)=\delta_{ij}$.
     Alors pour tout $j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\}$, $L_i(a_j)=0$, donc a_j est racine de L_i. De plus, $L_i(a_i)=1$, donc L_i est non nul et de degré inférieur ou égal à n : donc L_i ne peut pas avoir plus de n racines, qu'on a déjà toutes trouvées.Ainsi, il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $L_i=\lambda\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(X-a_j)$.

     Puis, $L_i(a_i)=1=\lambda\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(a_i-a_j)$, donc $\lambda=\dfrac{1}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(a_i-a_j)}$.

     Ainsi, $L_i=\dfrac{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(X-a_j)}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(a_i-a_j)}$.
   - Synthèse : Posons $L_i=\dfrac{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(X-a_j)}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(a_i-a_j)}$.
     Comme L_i est un produit de n polynômes de degré 1, $\deg(L_i)=n$ et $L_i\in\mathbb{K}_n[X]$.
     Puis, pour tout $j\in[\![0,n]\!]$, $L_i(a_j)=\delta_{ij}$.

   Ainsi, $\boxed{\text{il existe unique } L_i\in\mathbb{K}_n[X] \text{ tel que } \forall j\in[\![0,n]\!],\ L_i(a_j)=\delta_{ij}}$.

   (b) Soit $\lambda_0,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tels que $\lambda_0L_0+\dots+\lambda_nL_n=0_{\mathbb{K}[X]}$. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. On évalue ce dernier polynôme en a_k : tous les termes s'annulent sauf $L_k(a_k)=1$. Donc $\lambda_k=0$.
   Ainsi la famille $(L_0,\dots,L_n)$ est libre. Elle est de cardinal $n+1=\dim(\mathbb{K}_n[X])$, donc $\boxed{(L_0,\dots,L_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}_n[X]}$.

   (c) Notons $\lambda_0,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ les coordonnées de P dans la base $(L_0,\dots,L_n)$. On a donc $P=\lambda_0L_0+\dots+\lambda_nL_n$.
   Soit $k\in[\![0,n]\!]$: on évalue P en a_k pour obtenir $P(a_k)=\lambda_k$.
   Ainsi, $\boxed{P=P(a_0)L_0+\dots+P(a_k)L_k}$.
7. Soit A et B deux événements de $(\Omega,\mathbb{P})$. On dit que A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
8. Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un EPF et soient $A_1,\dots,A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})\neq 0$. On a

   $$\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_n)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

   On procède par récurrence sur $n\geq 1$. On pose H_n : « Pour tout $A_1,\dots,A_n$ événements de Ω avec $\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})\neq 0$, $\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_n)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$ ».
   - Initialisation : Pour $n=1$, pour tout événement A_1, on a bien $\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(A_1)$.
   - Hérédité : soit $n\geq 1$. Supposons que H_n est vraie. Soient $A_1,\dots,A_{n+1}$ des événements de Ω tels que $\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_n)\neq 0$.
     On pose $A=A_1\cap\dots\cap A_n$. Par définition, $\mathbb{P}_A(A_{n+1})=\dfrac{\mathbb{P}(A\cap A_{n+1})}{\mathbb{P}(A)}$, donc $\mathbb{P}(A\cap A_{n+1})=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(A_{n+1})$.
     Or, $A_1\cap\cdots A_{n-1}\supset A$, donc $\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})\geq\mathbb{P}(A)>0$. D'après H_n, on a $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$.
     On obtient ainsi $\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_n)=\mathbb{P}(A\cap A_{n+1})=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)\mathbb{P}_A(A_{n+1})$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq 1$, H_n est vraie.

9. (a) Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un EPF. On dit qu'une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements de Ω est un système complet d'événements si :
   - $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$;
   - $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

   Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un SCE de Ω. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$.

   (b) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note U_i : « on choisit l'urne i ». On pose aussi B : « on tire deux boules blanches ».
   La famille $(U_1, \ldots, U_n)$ est un SCE, donc d'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap U_i)$.
   D'après les probabilités composées, $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_i)\mathbb{P}_{U_i}(B) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(B) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}$.

10. (a) Pour tout $k \in [\![1,2n]\!]$,on note F_k : « la pièce donne face au k-ième lancer ».
   - $\boxed{A = \left(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap F_{2n-1} \cap \overline{F_{2n}}\right) \cup \left(\overline{F_1} \cap F_2 \cap \cdots \cap \overline{F_{2n-1}} \cap F_{2n}\right)}$
   - $\boxed{B = \left(\overline{F_1} \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{2n}\right) \cup \left(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap F_{2n}\right) \cup \cdots \cup \left(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap \overline{F_{2n}}\right)}$
   - $\boxed{C = (F_1 \cap \cdots F_{2n}) \cup \left(F_1 \cap \ldots \cap F_{2n-1} \cap \overline{F_{2n}}\right) \cup \left(F_1 \cap \ldots \cap \overline{F_{2n-1}} \cap \overline{F_{2n}}\right) \cup \cdots \cup \left(\overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_{2n}}\right)}$.

   (b)
   - L'union dans l'expression de A est disjointe, et les événements $F_1, \ldots, F_{2n}$ sont indépendants, donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap F_{2n-1} \cap \overline{F_{2n}}\right) +$ $\mathbb{P}\left(\overline{F_1} \cap F_2 \cap \cdots \cap \overline{F_{2n-1}} \cap F_{2n}\right) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(\overline{F_2})\cdots\mathbb{P}(\overline{F_{2n}}) + \mathbb{P}(\overline{F_1})\mathbb{P}(F_2)\cdots\mathbb{P}(F_{2n}) = 2\dfrac{1}{3^n}\dfrac{2^n}{3^n}$. Donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = \dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}}}$.
   - De même, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\overline{F_1} \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{2n}\right) + \mathbb{P}\left(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap F_{2n}\right) + \cdots + \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap \overline{F_{2n}}\right) = \mathbb{P}(\overline{F_1})\mathbb{P}(F_2)\cdots\mathbb{P}(F_{2n}) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(\overline{F_2})\cdots\mathbb{P}(F_{2n}) +$ $\cdots + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2)\cdots\mathbb{P}(\overline{F_{2n}}) = 2n\dfrac{1}{3}\dfrac{2^{2n-1}}{3^{2n-1}}$. Donc $\boxed{\mathbb{P}(B) = n\dfrac{2^{2n}}{3^{2n}}}$.

11. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit qu'une application $f : E \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire si elle est linéaire.
12. Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E,F)$:
   - le noyau de f est : $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$;
   - l'image de f est : $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ \text{avec } x \in E\}$.
13.
   - Soit $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x) = g(f(x))$, donc $y \in \mathrm{Im}(g)$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)}$.
   - Soit $x \in \ker(f)$. Alors $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0_F) = 0_G$ car g est linéaire. Donc $x \in \ker(g \circ f)$. Ainsi, $\boxed{\ker(f) \subset \ker(g \circ f)}$

Correction de l'exercice 2 :

1. La pente de la droite est $\dfrac{d-1}{2-1} = d-1$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que une équation de la droite est $y = (d-1)x + b$. Comme $(1,1)$ est sur la droite, $1 = (d-1) + b$, et $b = 2 - d$.
   Ainsi, une équation de la droite est $\boxed{y = (d-1)x + 2 - d}$.
2. On a $\boxed{\Omega = [\![1,6]\!]^2}$ (résultats des deux dés) et comme les dés sont équilibrés, on est en $\boxed{\text{équiprobabilité}}$.
3. On énumère les cas :
   - si $b = 1$, on doit avoir $a \geq 1$, donc on a 6 possibilités ;
   - si $b = 2$, on doit avoir $a \geq 3$, donc on a 4 possibilités ;
   - si $b = 3$, on doit avoir $a \geq 5$, donc on a 2 possibilités ;
   - si $b = 4, 5$ ou 6, on a $a \geq 7$, donc aucune possibilités.

   Ainsi, $\boxed{\operatorname{card}\left\{(a,b) \in [\![1,6]\!]^2 \mid a \geq 2b - 1\right\} = 6 + 4 + 2 = 12}$.
4. D'après l'énoncé, le point $(3, e)$ est au-dessus de la droite si et seulement si $e \geq f(3) = 3(d-1) + 2 - d = 2d - 1$.
   D'après la question précédente, on a $\operatorname{card}(A) = 12$. Comme on est en équiprobabilité, $\boxed{\mathbb{P}(A) = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (0,0,0)$. Alors $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + 2\lambda_3, 3\lambda_3) = (0,0,0)$, donc $\lambda_3 = 0$, puis $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = 0$.
   Donc (e_1, e_2, e_3) est libre de cardinal $3 = \dim(E)$. C'est donc une base de E. Ainsi, $\boxed{F \oplus G = E}$.
2. Soient $(x,y,z), (x',y',z') \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $f(\lambda(x,y,z) + (x',y',z')) = f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = \lambda z + z' = \lambda f(x,y,z) + f(x',y',z')$.
   Donc f est linéaire, à valeurs dans $\mathbb{R}$, d'où $\boxed{f \text{ est une forme linéaire}}$.
3. Comme f est une forme linéaire non nulle (car $f(0,0,1) = 1$ par exemple), son noyau est un hyperplan de E (de dimension 2).
   De plus, $f(e_1) = f(e_2) = 0$, donc $e_1, e_2 \in \ker(f)$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \subset \ker(f)$.
   D'après la première question, (e_1, e_2) est libre, donc F est de dimension 2. Ainsi, $\boxed{F = \ker(f)}$.

4. Il existe $u_F \in F$ et $u_G \in G$ tels que $u = u_F + u_G$. De plus, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_G = \lambda e_3 = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$. Comme f est linéaire, $f(u) = f(u_F) + f(u_G) = f(u_G)$ car $F = \ker(f)$.
Ainsi, $z = 3\lambda$ et $u_G = \left(\frac{z}{3}, \frac{2z}{3}, z\right)$ et $u_F = u - u_G = \left(x - \frac{z}{3}, y - \frac{2z}{3}, 0\right)$.
Donc la projection de u sur F parallèlement à G est $\boxed{u_F = \left(x - \frac{z}{3}, y - \frac{2z}{3}, 0\right)}$.

5. D'après la question précédente, le symétrique de u par rapport à G parallèlement à F est $\boxed{u_G - u_F = \left(\frac{2z}{3} - x, \frac{4z}{3} - y, z\right)}$.

Correction de l'exercice 4 :

1. Soit $u \in E$. Alors u' et u'' sont encore de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc $g(u) \in E$.
Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $g(\lambda u + v) = (\lambda u + v)'' - 2(\lambda u + v)' + 2(\lambda u + v) = \lambda u'' + v'' - 2\lambda u' - 2v' + 2\lambda u + 2v = \lambda(u'' - 2u' + 2u) + v'' - 2v' + 2v = \lambda g(u) + g(v)$.
Donc $\boxed{g \in \mathscr{L}(E)}$.

2. Soit $u \in E$.
$$\begin{aligned} u \in \ker(g - 2\,\mathrm{id}_E) &\iff g(u) - 2u = 0 \\ &\iff u'' - 2u' = 0 \end{aligned}$$
L'équation caractéristique est $r^2 - 2r = 0$ de racines 2 et 0. Donc $u \in \ker(g - 2\,\mathrm{id}_E) \iff \exists A, B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, u(x) = A + B\,\mathrm{e}^{2x}$.
Posons $u_1 : x \mapsto 1$ et $u_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$. On a $\ker(g - 2\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. De plus, pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$, on a lorsque $x \to -\infty$, $\lambda_1 = 0$ puis en prenant $x = 0$, $\lambda_2 = 0$. Donc $\boxed{(u_1, u_2) \text{ est libre, c'est une base de } \ker(g - 2\,\mathrm{id}_E)}$.

3. Soit $u \in E$.
$$\begin{aligned} u \in \ker(g) &\iff g(u) = 0 \\ &\iff u'' - 2u' + 2u = 0 \end{aligned}$$
L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 2 = 0$ dont les racines sont $1 - i$ et $1 + i$. Donc $u \in \ker(g) \iff \exists A, B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, u(x) = A\,\mathrm{e}^x \cos(x) + B\,\mathrm{e}^x \sin(x)$.
Posons $v_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x \cos(x)$ et $v_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$. On a $\ker(g) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$, on évalue en $x = 0$ pour obtenir $\lambda_1 = 0$ puis en $x = \frac{\pi}{2}$ pour trouver $\lambda_2 = 0$. Donc $\boxed{(v_1, v_2) \text{ est libre, c'est une base de } \ker(g)}$.

Correction de l'exercice 5 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille $(D_n, \overline{D_n})$ est un SCE, donc on applique la formule des probabilités totale : $\mathbb{P}(D_{n+1}) = \mathbb{P}(D_{n+1} \cap D_n) + \mathbb{P}(D_{n+1} \cap \overline{D_n})$.
Puis la formule des probabilités composées : $p_{n+1} = \mathbb{P}(D_n)\mathbb{P}_{D_n}(D_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{D_n})\mathbb{P}_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) = p_n \frac{2}{3} + (1 - p_n)\frac{1}{2}$.
On obtient bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{2}}$.

2. (p_n) est une suite arithmético-géométrique. On prend $c \in \mathbb{R}$ tel que $c = \frac{1}{6}c + \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $c = \frac{3}{5}$.
Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} - c = \frac{1}{6}(p_n - c)$, donc la suite $(p_n - c)$ est géométrique de raison $\frac{1}{6}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n - c = \frac{1}{6^{n-1}}(p_1 - c)$. Or $p_1 = \frac{1}{2}$.
Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{10 \times 6^{n-1}}}$.

3. On a $\boxed{p_n \to \frac{3}{5}}$. Oui, car on a plus de chance d'utiliser la pièce D qui donne face avec probabilité plus grande que $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 6 :

1. On a $E_2 = S_1 \cap S_2$. Donc par indépendance, $u_2 = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2)$, et $\boxed{u_2 = \frac{4}{9}}$.

2.
   - On a $\boxed{E_3 = L_1 \cap S_2 \cap S_3}$. Par indépendance, on obtient $\boxed{u_3 = \frac{4}{27}}$.
   - On a $\boxed{E_4 = (L_1 \cap L_2 \cap S_3 \cap S_4) \cup (S_1 \cap L_2 \cap S_3 \cap S_4) = L_2 \cap S_3 \cap S_4}$. Par indépendance, $\boxed{u_4 = \frac{4}{81} + \frac{8}{81} = \frac{4}{27}}$.

3. $\boxed{\mathbb{P}_{L_1}(E_4) = \mathbb{P}(E_4) = \frac{4}{27}}$ par indépendance.
$\boxed{\mathbb{P}_{S_1 \cap L_2}(E_4) = \frac{\mathbb{P}(S_1 \cap L_2 \cap S_3 \cap S_4)}{\mathbb{P}(S_1 \cap L_2)} = \frac{4}{9}}$ par indépendance.

4. Si on sait qu'un Lannister est mort en premier, la suite se passe comme si on reprenait au début : on compte en décalé les morts à partir du deuxième en attendant deux Starks d'affilé aux rang $n - 2$ et $n - 1$. Donc $\mathbb{P}_{L_1}(E_n) = u_{n-1}$.

5. De même que pour la question précédente mais on décale de 2 le compte : $\boxed{\mathbb{P}_{S_1 \cap L_2}(E_n) = u_{n-2}}$.
Par contre, si on sait que $S_1 \cap S_2$ est réalisé, alors E_n ne peut pas être réalisé : $\boxed{\mathbb{P}_{S_1 \cap S_2}(E_n) = 0}$.

6. Soit $n \geq 4$. La famille $(L_1, S_1 \cap L_2, S_1 \cap S_2)$ est un SCE donc on applique la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(L_1)\mathbb{P}_{L_1}(E_n) + \mathbb{P}(S_1 \cap L_2)\mathbb{P}_{S_1 \cap L_2}(E_n) + \mathbb{P}(S_1 \cap S_2)\mathbb{P}_{S_1 \cap S_2}(E_n)$.
   Par indépendance et avec les questions précédentes, on trouve $\boxed{u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + \frac{2}{9}u_{n-2}}$.
7. L'équation caractéristique est $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9} = 0$ dont les racines sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geq 2$, $u_n = A\frac{(-1)^n}{3^n} + B\frac{2^n}{3^n}$.
   Or, $u_2 = \frac{4}{9}$ et $u_3 = \frac{4}{27}$, donc on obtient le système $\begin{cases} \frac{A}{9} + \frac{4B}{9} = \frac{4}{9} \\ -\frac{A}{27} + \frac{8B}{27} = \frac{4}{27} \end{cases}$, qui donne après résolution $A = \frac{4}{3}$ et $B = \frac{2}{3}$.
   Ainsi, $\boxed{\forall n \geq 2,\ u_n = 4\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} + \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}$.
8. Soit $n \geq 2$. Les événements $E_2, \ldots, E_n$ sont deux à deux disjoints, donc $p_n = \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=2}^{n} u_i$.
   Donc $p_n = 4\sum_{i=2}^{n} \frac{(-1)^i}{3^{i+1}} + \sum_{i=2}^{n} \frac{2^{i+1}}{3^{i+1}} = 4\frac{1}{27}\frac{1 - \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}}{1 + \frac{1}{3}} + \frac{8}{27}\frac{1 - \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}}{1 - \frac{2}{3}}$ et enfin $\boxed{p_n = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right) + \frac{8}{9}\left(1 - \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\right)}$.
   On trouve $\boxed{p_n \to 1}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, la probabilité qu'il n'y ait jamais deux Starks morts d'affilé avant le rang n tend vers 0.

Correction de l'exercice 7 :

1. Comme $\mathrm{id}_E = \left(-\frac{1}{3}f + \frac{4}{3}\mathrm{id}_E\right) \circ f = f \circ \left(-\frac{1}{3}f + \frac{4}{3}\mathrm{id}_E\right)$, f est inversible et $f^{-1} = -\frac{1}{3}f + \frac{4}{3}\mathrm{id}_E$. Donc $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E}$.
2. Comme f est une homothétie, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \mathrm{id}_E$. En remplaçant dans l'équation on trouve $(\lambda^2 - 4\lambda + 3)\mathrm{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$. Les solutions sont 1 et 3. Donc $\boxed{f = \mathrm{id}_E \text{ ou bien } f = 3\,\mathrm{id}_E}$.
3. (a) On calcule $p \circ p = \frac{1}{4}(f^2 - 2f + \mathrm{id}_E) = \frac{1}{4}(4f - 3\mathrm{id}_E - 2f + \mathrm{id}_E) = \frac{1}{4}(2f - 2\mathrm{id}_E) = \frac{1}{2}(f - \mathrm{id}_E)$. Donc $p \circ p = p$ et $\boxed{p \text{ est un projecteur}}$.
   (b) On remarque que $p + q = \mathrm{id}_E$, donc $q = \mathrm{id}_E - p$: $\boxed{q \text{ est la projection sur } \ker(p) \text{ parallèlement à } \mathrm{Im}(p)}$.
   (c) Soit $x \in E$.
   - Analyse : soit $x_1 \in \ker(f - \mathrm{id}_E)$ et $x_2 \in \ker(f - 3\mathrm{id}_E)$ avec $x = x_1 + x_2$. On a $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = 3x_2$, donc $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = x_1 + 3x_2$. En soustrayant les deux équations, $2x_2 = f(x) - x$, donc $x_2 = \frac{1}{2}(f(x) - x) = p(x)$.
     Puis $x_1 = x - x_2 = q(x)$.
   - Synthèse : soit $x_1 = q(x)$ et $x_2 = p(x)$. On a $x_1 + x_2 = (p+q)(x) = x$ et $(f - \mathrm{id}_E)(x_1) = 0_E$ et $(f - 3\mathrm{id}_E)(x_2) = 0_E$ donc $x_1 \in \ker(f - \mathrm{id}_E)$ et $x_2 \in \ker(f - 3\mathrm{id}_E)$.

   Ainsi, $\boxed{E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(f - 3\mathrm{id}_E)}$.
   (d) On note que $\boxed{3p + q = f}$.
   (e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on peut appliquer Newton : $\boxed{f^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k p^k q^{n-k} = q^n + 3^n p^n}$.

Correction de l'exercice 8 :

1. (a) Le nombre total de bulletins est 5 : pour obtenir un dépouillement, il faut choisir à quel moment on trouve les 2 bulletins B. Il y a $\binom{5}{2}$ choix possibles. Donc il y a $\boxed{10 \text{ dépouillements possibles}}$.
   (b) On commence par au moins deux A. Il n'y a que $\boxed{AABAB \text{ et } AAABB}$.
2. (a) Comme il y a $m + n$ bulletins, pour obtenir un dépouillement, on choisit où sont placés les bulletins pour A parmi les $m + n$ bulletins.
   Donc il y a bien $\boxed{\binom{m+n}{m} \text{ dépouillements possibles}}$.
   (b) Si le dépouillement commence par un B, il reste $m+n-1$ bulletins à placer avec toujours m bulletins A. Il y a donc $\boxed{\binom{m+n-1}{m} \text{ dépouillements possibles}}$
   (c) On remarque qu'un dépouillement vérifiant $\mathcal{P}$ ne peut pas commencer par un B.Donc le nombre de dépouillements vérifiant $\mathcal{P}$ est au maximum égal au total moins ceux qui commencent par un B, c'est-à-dire $\binom{m+n}{m} - \binom{m+n-1}{m}$.
   Or, la formule de Pascal donne $\binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n}{m}$, donc $\binom{m+n}{m} - \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-1}{m-1}$.
   Ainsi, $\boxed{\text{le nombre de dépouillements vérifiant } \mathcal{P} \text{ est inférieur ou égal à } \binom{m+n-1}{m-1}}$.