Chapitre 25 : Intégration

I. Intégrale des fonctions en escalier

Définition I.1. Soit $[a,b]$ un segment. On appelle **subdivision** de $[a,b]$ toute famille finie $\sigma=(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ d'éléments de $[a,b]$ telle que : $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=n$.
Le **pas** de la subdivision σ est le réel : $\delta_\sigma=\max\{x_{i+1}-x_i, i\in[\![0,n-1]\!]\}$.

Définition I.2. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est une fonction **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma=(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est constante.
On dit alors que σ est une subdivision adaptée à f.

Proposition I.1. *Toute combinaison linéaire de fonctions en escalier sur $[a,b]$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$.*

Définition I.3. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction en escalier. Pour toute subdivision $\sigma=(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $[a,b]$ adaptée à f, on pose y_i la valeur de f sur l'intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$ et :

$$S(f,\sigma)=\sum_{i=0}^{n-1}y_i(x_{i+1}-x_i).$$

Théorème I.2

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction en escalier et σ, σ' deux subdivisions adaptées à f. Alors $S(f,\sigma)=S(f,\sigma')$.
On note $\int_a^b f$, ou $\int_a^b f(t)dt$, ou $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_{[a,b]} f(t)dt$ la valeur commune.

Exemple I.1. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction constante égale à C, alors $\int_a^b f$ est l'aire d'un rectangle de côtés $b-a$ et $|C|$ (en faisant attention au signe de C), donc $\int_a^b f=(b-a)C$.

Proposition I.3.
1. *Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions en escalier et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $\int_a^b(\lambda f+g)=\lambda\int_a^b f+\int_a^b g$.*
2. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ en escalier et positive. Alors $\int_a^b f\geq 0$.*

II. Intégrale des fonctions continues sur un segment

II.1. Définition

Théorème II.1

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'ensemble

$$m(f)=\left\{\int_{[a,b]}g(t)dt \mid g\leq f \text{ et } g \text{ est en escalier}\right\}$$

admet une borne supérieure et l'ensemble

$$M(f)=\left\{\int_{[a,b]}g(t)dt \mid g\geq f \text{ et } g \text{ est en escalier}\right\}$$

admet une borne inférieure. De plus, $\inf(M(f)) = \sup(m(f))$*. On note cette valeur* $\int_a^b f$*, ou* $\int_a^b f(t)dt$*, ou* $\int_{[a,b]} f$ *ou* $\int_{[a,b]} f(t)dt$*.*

Remarque II.1. On posera $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

II.2. Propriétés de base

II.2.1 Linéarité et relation de Chasles

Proposition II.2. *L'application* $f \in \mathscr{C}([a,b]) \mapsto \int_a^b f(t)dt \in \mathbb{R}$ *est une forme linéaire.*

Proposition II.3. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue et* $c \in [a,b]$*.*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

II.2.2 Positivité et croissance

Proposition II.4. *Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur* $[a,b]$*.*

1. *Si* $f \geq 0$*, alors* $\int_a^b f \geq 0$*.*
2. *Si* $f \geq g$*, alors* $\int_a^b f \geq \int_a^b g$*.*
3. $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$*.*
4. *Si pour tout* $x \in [a,b]$*,* $m \leq f(x) \leq M$*, alors* $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$*.*

II.3. Valeur moyenne

Définition II.1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. La **valeur moyenne** de f est $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

Remarque II.2. La valeur moyenne de f est la valeur de la fonction constante qui a la même intégrale que f sur $[a,b]$. En effet, $\int_a^b \mu = (b-a)\mu = \int_a^b f$ car μ est une constante.

Théorème II.5 (Formule de la moyenne)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue. Il existe* $c \in [a,b]$ *tel que* $f(c) = \mu$*.*

III. Intégrales et primitives

III.1. Théorème fondamental de l'analyse

Théorème III.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule au point a.

Remarque III.1. En particulier, toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

Corollaire III.2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a, b \in I$.*

1. *Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.*
2. *Si f est $\mathscr{C}^1$ sur I, alors $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$.*

Proposition III.3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue de signe constant. Si $\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$.*

Proposition III.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période T. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

III.2. Rappels

Théorème III.5

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$

Théorème III.6

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $g : J \to I$ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur J. Pour tout $a, b \in J$,

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

Proposition III.7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1. *Si f est impaire, alors pour tout $a \geq 0$, $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.*
2. *Si f est paire, alors pour tout $a \geq 0$, $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.*

IV. Calcul approché d'intégrales

IV.1. Sommes de Riemann

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, de sorte que $x_0 = a$ et $x_n = b$, et $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$, donc les x_k sont régulièrement espacés entre a et b et $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une subdivision de $[a,b]$ de pas $\dfrac{b-a}{n}$.
On approxime $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f$ par l'aire du rectangle de côtés $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$ et $f(x_k)$. On pose donc

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

C'est une **somme de Riemann** de la fonction f.
Si n est petit, c'est assez grossier, mais lorsque n tend vers $+\infty$, on a le résultat suivant.

Théorème IV.1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt.$$

Remarque IV.1. On aurait aussi pu prendre des rectangles dont les hauteurs sont données par les images par f de n'importe quels points des intervalles $\left[a + k\dfrac{b-a}{n}, a + (k+1)\dfrac{b-a}{n}\right]$.
En particulier, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

IV.2. Méthode des trapèzes

L'erreur dans la méthode des rectangles est de l'ordre de $\dfrac{1}{n}$. Au lieu d'approcher l'intégrale de f sur $\left[a + k\dfrac{b-a}{n}, a + (k+1)\dfrac{b-a}{n}\right]$ par l'aire d'un rectangle, on peut l'approcher par l'aire d'un trapèze dont les bases sont $f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ et $f\left(a + (k+1)\dfrac{b-a}{n}\right)$ et de hauteur $\dfrac{b-a}{n}$. Son aire est $\dfrac{f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)}{2} \times \dfrac{b-a}{n}$.
On pose donc :

$$\begin{aligned}
T_n(f) &= \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)\right)\\
&= \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Proposition IV.2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La suite $(T_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et*

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Remarque IV.2. Si f est $\mathscr{C}^2$, alors l'erreur d'approximation dans la méthode des trapèze est de l'ordre de $\dfrac{1}{n^2}$.

V. Intégration des fonctions à valeurs complexes

V.1. Définition

Définition V.1. On dit que $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. L'**intégrale** de f entre a et b est le complexe :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\mathrm{d}t.$$

Remarque V.1. L'intégrale d'une fonction complexe a essentiellement les mêmes propriétés que celle d'une fonction réelle :

- Linéarité, relation de Chasles ;
- Inégalité triangulaire ;
- Théorème fondamental de l'analyse (voir le paragraphe III) ;
- Intégration par parties et changement de variables (voir le paragraphe III).

Il manque principalement la positivité et la croissance et les propriétés qui en découlent bien sûr.

V.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème V.1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $a \in I$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Alors :

$$\forall x \in I, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarque V.2. 1. En particulier, si I est un segment, comme $f^{(n+1)}$ est continue, le réel M existe.

2. La fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ est une fonction polynomiale et s'appelle le **polynôme de Taylor** de f en a à l'ordre n.

Corollaire V.2. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$.*