Colles 27 - 12/05/2025 au 16/05/2025

Thèmes traités en classe

- Chapitre 24 : Applications linéaires.
  1. Définitions, vocabulaire.
  2. Opérations sur les applications linéaires.
  3. Noyau, image, injectivité, surjectivité.
  4. Endomorphismes remarquables : homothéties, projecteurs, symétries.
  5. Caractérisation de l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité avec l'image d'une base.
  6. Une application linéaire est complètement déterminée par l'image d'une base.
  7. Isomorphisme et dimension.
  8. Rang d'une application linéaire : définition et propriétés.
  9. Théorème du rang.
  10. Bijectivité automatique en dimension finie.
  11. Ensemble des solutions d'une équation linéaire, application aux suites récurrentes d'ordre 2.
  12. Formes linéaires et hyperplans.

  Exercices traités en cours : I.2, I.3, I.4, I.5, I.6, I.8, I.10, II.1, II.2, III.1, III.2, III.3, III.5, III.6, III.10, III.11, III.14, III.18.
- Chapitre 25 : Intégration.
  1. Intégrale des fonctions en escaliers.
  2. Intégrale des fonctions continues sur un segment.
  3. Propriétés : linéarité, Chasles, croissance et positivité.
  4. Théorème fondamental de l'analyse.
  5. Rappels de calcul intégral.
  6. Sommes de Riemann.
  7. Taylor-Lagrange.

  Exercices traités en classe : II.1, II.2, II.3, II.4, II.6, II.8, II.9, II.10.

Questions de cours

Question 1

- Montrer que la composée de deux applications linéaires est linéaire, puis que la réciproque d'un isomorphisme est linéaire.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Donner les définitions de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $\ker(f)$ est un sev de E.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors $f(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)) = \mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))$.
- C24 Exercice I.8 : soit $f,g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f\circ g = g\circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.
- Montrer que l'application $\varphi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to M^\top \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une symétrie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sev supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- C24 Exercice I.6 : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  - ▹ Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \subset \ker(f - \mathrm{id}_E)$.
  - ▹ Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.
- C24 Exercice II.1 : Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(1) = P''(1) = 0\}$.
  - ▹ Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$.
  - ▹ Déterminer le projeté du polynôme $X^2 + X + 1$ sur F parallèlement à G, puis son symétrique par rapport à F parallèlement à G.
- C24 Exercice III.6 : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0,\dots,a_n$ des réels distincts. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\phi(P) = (P(a_0),\dots,P(a_n))$.
  1. Montrer que ϕ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
  2. Quelle est l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ par ϕ^{-1} ?

- C24 Exercice III.10 : soit E un espace vectoriel de dimension n et f une forme linéaire sur E. On prend $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.
  1. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \text{Vect}(a)$.
  2. On suppose que $f(a) = 1$ et on pose pour tout $x \in E$, $p(x) = f(x)a$.
     Montrer que p est un projecteur de E et déteminer ses éléments caractéristiques.
- C24 Exercice III.11 : soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$ et en donner une base.
- C24 Exercice III.5 : soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n\}$.
  - ▹ Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
  - ▹ Montrer que l'application $\varphi : u \in E \mapsto (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme.
  - ▹ En déduire la dimension puis une base de E.
- Soit E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle. Montrer que $\ker(u)$ est un hyperplan de E.
- Soit E de dimension finie et H un hyperplan de E et D une droite qui n'est pas contenue dans H. Alors $E = H \oplus D$.
- C25 Exercice II.4 :
  1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$.
  2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.
  3. Déterminer la limite et un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$.
- C25 Exercice II.9 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.
  1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
  2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ et en déduire que $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
  3. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$ et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
  - ▹ Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire avec le noyau et l'image.
  - ▹ Propriétés des projections.
  - ▹ Propriétés des symétries.
  - ▹ Application linéaire complètement déterminée par l'image d'une base.
  - ▹ Lien rang et injectivité/surjectivité.
  - ▹ Rang d'une composée.
  - ▹ Théorème du rang.
  - ▹ Bijectivité automatique en dimension finie.
  - ▹ Lien hyperplan/formes linéaires.
  - ▹ Propriétés de l'intégrale : positivité, croissance, inégalité triangulaire.
  - ▹ Théorème fondamental de l'analyse.
  - ▹ Stricte positivité.
  - ▹ Intégration et parité.
  - ▹ Théorème de convergence des sommes de Riemann.
  - ▹ Inégalité de Taylor-Lagrange.

A savoir faire

1. Savoir montrer qu'une application est linéaire/est un endomorphisme.
2. Savoir déterminer une base du noyau/de l'image d'une application linéaire.
3. Savoir déterminer l'expression d'une projection, d'une symétrie.

4. Savoir vérifier qu'un endomorphisme est une projection/une symétrie et trouver ses sous-espaces caractéristiques.
5. Savoir appliquer le théorème du rang.
6. Savoir utiliser une forme linéaire pour justifier qu'un sous-ensemble est un hyperplan.
7. Savoir calculer une intégrale.
8. Savoir encadrer une intégrale.