Contrôle de cours 20 - Intégration - Sujet A
Jeudi 15 mai 2025

Question 1 (1 pt)

Énoncer l'inégalité triangulaire intégrale.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On a $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$. ☐

Question 2 (1 pt)

Énoncer la stricte positivité de l'intégrale.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et de signe constant sur $[a,b]$. Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = 0$. ☐

Question 3 (1 pt)

Énoncer le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. ☐

Question 4 (1 pt)

Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'INTERVALLE I et $a \in I$. Alors $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. ☐

Question 5 (1 pt)

Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et $a \in I$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Alors pour tout $t \in I$, $\left|f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|t-a|^{n+1}$. ☐

Question 6 (4 pts)

Calculer :

1. $I = \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$

   On fait une IPP : on pose $u(t) = 1-t$ et $v(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}$ de sorte que $u'(t) = -1$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-2t}$:
   $\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = -\left[(1-t)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}[\mathrm{e}^{-2t}]_0^1 = \frac{1+\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

2. $J = \int_1^{16} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ en posant $t = \sqrt{x}$

   On a $x = t^2$, donc $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$, et attention aux bornes : $J = \int_1^4 \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int_1^4 \frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = 2(3 - [\ln(1+t)]_1^4) = 6 - 2\ln\left(\frac{5}{2}\right)$. ☐

Question 7 (2 pts)

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

On pose $f : t \mapsto \sin(2\pi t)$ qui est continue sur $[0,1]$. On a une somme de Riemann donc $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$. □

Question 8 (2 pts)

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et $u : x \mapsto \int_{x^2}^{2x} f(t)\mathrm{d}t$. Justifier que u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée en fonction de f.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle), d'après le TFA, $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en 0. Donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = F(2x) - F(x^2)$, donc u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations et $u'(x) = 2f(2x) - 2xf(x^2)$ □

Contrôle de cours 20 - Intégration - Sujet B
Jeudi 15 mai 2025

Question 1 (1 pt)

Énoncer l'inégalité triangulaire intégrale.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On a $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$. ☐

Question 2 (1 pt)

Énoncer la stricte positivité de l'intégrale.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et de signe constant sur $[a,b]$. Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$, alors pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) = 0$. ☐

Question 3 (1 pt)

Énoncer le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. ☐

Question 4 (1 pt)

Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'INTERVALLE I et $a \in I$. Alors $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. ☐

Question 5 (1 pt)

Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et $a \in I$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Alors pour tout $t \in I$, $\left|f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|t-a|^{n+1}$. ☐

Question 6 (4 pts)

Calculer :

1. $I = \int_0^{\pi/2} (1-t)\cos(2t)\mathrm{d}$

   On fait une IPP : on pose $u(t) = 1-t$ et $v(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$ de sorte que $u'(t) = -1$ et $v'(t) = \cos(2t)$: $\int_0^{\pi/2} (1-t)\cos(2t)\mathrm{d}t = \left[(1-t)\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin(2t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}[\cos(2t)]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$

2. $J = \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ en posant $t = \mathrm{e}^x$

   On a $x = \ln(t)$, donc $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ et attention aux bornes : $J = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t(1+t)}\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = [\ln(t) - \ln(1+t)]_1^{\mathrm{e}} = 1 - \ln(1+\mathrm{e}) + \ln(2)$. ☐

Question 7 (2 pts)
Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$.

On pose $f : t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$ qui est continue sur $[0,1]$. On a une somme de Riemann donc $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. □

Question 8 (2 pts)
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et $u : x \mapsto \int_{3x}^{\cos(x)} f(t)\mathrm{d}t$. Justifier que u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée en fonction de f.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle), d'après le TFA, $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en 0. Donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = F(\cos(x)) - F(3x)$, donc u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations et $u'(x) = -\sin(x)f(\cos(x)) - 3f(3x)$ □