

Matrices et applications linéaires - Exercices

Exercice 1. Pour chaque matrice, déterminer l'application linéaire canoniquement associée puis son noyau, son rang et son image.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4. D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Pour chaque application linéaire, déterminer sa matrice dans les bases canoniques, puis dire si l'application est injective, surjective, bijective.

$$1. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y);$$

$$2. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x - 3y, x + y);$$

$$3. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2x - y, x + y, x - y);$$

$$4. f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, y - z);$$

$$5. f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, x - z, x + z).$$

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son application linéaire canoniquement associée.

$$1. \text{ Déterminer l'ensemble des vecteurs } u \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } f(u) = 4u.$$

$$2. \text{ Déterminer l'ensemble des vecteurs } u \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } f(u) = 2u.$$

$$3. \text{ Soit } e_2 \in \mathbb{R}^3 \text{ un vecteur non nul tel que } f(e_2) = 2e_2. \text{ Déterminer un vecteur } e_3 \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(e_3) = 2e_3 + e_2.$$

$$4. \text{ Justifier qu'il existe une base de } \mathbb{R}^3 \text{ dans laquelle la matrice de } f \text{ est } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit l'application linéaire $f_m(x, y, z) = (mx + y + (2m - 1)z, x + (1 - m)y, x - y + (2 - m)z)$.

$$1. \text{ Déterminer la matrice } A \text{ canoniquement associée à } f_m.$$

$$2. \text{ Pour quelles valeurs de } m \text{ la rang de } A \text{ vaut-il 3? Que peut-on dire de } f_m \text{ dans ce cas?}$$

$$3. \text{ Déterminer le noyau de } A \text{ en fonction de } m.$$

Exercice 5. 1. Soit $\varphi: P \in \mathbb{C}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{C}_3[X]$. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques.

$$2. \text{ Soit } \psi: P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto \int_0^1 P(x)dx \in \mathbb{C}. \text{ Déterminer la matrice de } \psi \text{ dans les bases canoniques.}$$

$$3. \text{ Soit } P_1 = 3X + 2 \text{ et } P_2 = 2X + 3. \text{ Montrer que } (P_1, P_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_1[X] \text{ et donner la matrice de } f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X]) \text{ définie par } f(P) = P' \text{ dans cette base.}$$

Exercice 6. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P) = (X^2 - X + 1)P' - (2X - 1)P + X^2P(1)$.

$$1. \text{ Montrer que } \varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].$$

$$2. \text{ Déterminer la matrice de } \varphi \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}_2[X].$$

$$3. \text{ Est-ce que } \varphi \text{ est un automorphisme?}$$

Exercice 7. On considère l'application $f: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_m[X]$ dont la matrice dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$1. \text{ Que valent } m \text{ et } n?$$

$$2. \text{ Soit } P \in \mathbb{R}_n[X]. \text{ Déterminer l'expression de } f(P).$$

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par $\varphi(M) = AM - MA$.

Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 9. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $d : f \in E \mapsto f' \in E$. On note $F = \text{Vect}(\sin, \cos, \text{ch}, \text{sh})$.

- (a) Donner la dimension de F et montrer que F est stable par d . On note $\varphi \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme induit par d .
(b) Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \text{ch}, \text{sh})$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(c) Montrer que φ est un automorphisme et écrire M^{-1} .
- Déterminer $\ker(\varphi - \text{id}_F)$ et $\text{Im}(\varphi - \text{id}_F)$ en utilisant M .
En déduire les solutions dans F de $y' - y = e^{-t} + \sin(t)$.

Exercice 10. 1. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ défini par $\varphi(P) = P(X+1)$. Donner la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ puis calculer A^{-1} .

- Soit $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_6[X])$ défini par $\psi(P) = P(1-X)$. Donner la matrice B de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_6[X]$ puis calculer B^{-1} .

Exercice 11. 1. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

- Montrer que $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques.

Exercice 12. Soit E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

- Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
- On se donne un tel x . Montrer que $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
- Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 13. Soient $u = (0, 1, 1)$, $v = (2, 0, -1)$ et $w = (2, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

- Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Soit $z = (4, -1, 1)$. Déterminer les coordonnées de z dans la base (u, v, w) .
- Soit $x \in \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base (u, v, w) sont $(-1, -8, 4)$. Déterminer les coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A . On pose $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1, -1, 0)$ et $f_3 = (1, 0, 1)$.

- Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- En déduire A^n .

Exercice 15. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P) = P + (X-a)P' + (X-a)^2P''$. Montrer qu'il existe

une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. 1. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et p un projecteur de E . On pose $r = \text{rg}(p)$. Montrer qu'il existe

une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}$.

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la symétrie par rapport au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à la droite $\mathcal{D} = \text{Vect}((-1, -1, 1))$.

- Écrire la matrice de s dans une base adaptée à la somme directe $\mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.
- En déduire la matrice de s dans la base canonique.

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On considère f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base et la dimension de $F = \ker(f - \text{id}_E)$, $G = \ker(f - 2\text{id}_E)$ et $H = \ker(f + 4\text{id}_E)$.
2. Déterminer une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice D de f est diagonale.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de A^n faisant intervenir les matrices de passages de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Exercice 18 (CCP PC 2018). On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Donner une base de $\text{Im}(A)$.
2. Donner une base de $\ker(A)$.
3. Déterminer $(Q, P) \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \times \text{GL}_4(\mathbb{R})$ tel que $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer la dimension de $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MA = 0_{3,4}\}$.

Exercice 19. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice non nulle telle que $M^2 = 0_2$. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 20 (Mines-Ponts PC 2018). Soit $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, $F_0 = 1$ et $F_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (F_0, F_1, \dots, F_n)$ est une base de E_n .
2. Pour tout $P \in E_n$, on pose $\Phi(P) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_n .
3. Donner la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.
4. Soit $Q \in E_{n-1}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E_n$ tel que $\Phi(P) = Q$ et $P(0) = 0$.
5. On prend $n = 3$ et $Q = X^2$.
 - (a) Exprimer Q dans la base $\mathcal{B}$.
 - (b) En déduire P tel que $\Phi(P) = X^2$ et $P(0) = 0$.
 - (c) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^m k^2$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.