

Colles 28 - 19/05/2025 au 23/05/2025**Thèmes traités en classe**

- Chapitre 24 : Applications linéaires.
Exercices traités en cours : I.2, I.3, I.4, I.5, I.6, I.8, I.10, II.1, II.2, III.1, III.2, III.3, III.5, III.6, III.10, III.11, III.14, III.18.
- Chapitre 25 : Intégration.
 1. Intégrale des fonctions en escaliers.
 2. Intégrale des fonctions continues sur un segment.
 3. Propriétés : linéarité, Chasles, croissance et positivité.
 4. Théorème fondamental de l'analyse.
 5. Rappels de calcul intégral.
 6. Sommes de Riemann.
 7. Taylor-Lagrange.**Exercices traités en classe** : II.1, II.2, II.3, II.4, II.6, II.8, II.9, II.10, II.11, II.12, II.15, III.2, IV.1.
- Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires.
 1. Application linéaire canoniquement associée à une matrice : définition, linéarité.
 2. Noyau et image d'une matrice, opérations élémentaires.
 3. Retour sur les systèmes linéaires.
 4. Matrice d'une application linéaire dans des bases.
 5. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, où $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$.
 6. Matrice de $f(x)$, matrice de $f \circ g$.
 7. Changement de bases, matrices semblables/équivalentes.
 8. Les différents rangs.**Exercices traités en classe** : 1, 2, 3, 5, 6, 11, 14.

Questions de cours**Question 1**

- C24 Exercice III.6 : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\phi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$.
 1. Montrer que ϕ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
 2. Quelle est l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ par ϕ^{-1} ?
- C24 Exercice III.10 : soit E un espace vectoriel de dimension n et f une forme linéaire sur E . On prend $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.
 1. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \text{Vect}(a)$.
 2. On suppose que $f(a) = 1$ et on pose pour tout $x \in E$, $p(x) = f(x)a$.
 Montrer que p est un projecteur de E et déterminer ses éléments caractéristiques.
- C24 Exercice III.11 : soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$ et en donner une base.
- C24 Exercice III.5 : soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n\}$.
 - ▷ Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 - ▷ Montrer que l'application $\varphi : u \in E \mapsto (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme.
 - ▷ En déduire la dimension puis une base de E .
- Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle. Montrer que $\ker(u)$ est un hyperplan de E .
- Soit E de dimension finie et H un hyperplan de E et D une droite qui n'est pas contenue dans H . Alors $E = H \oplus D$.
- C25 Exercice II.4 :
 1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.
 2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.

3. Déterminer la limite et un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}$.
- C25 Exercice II.9 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.
 1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et en déduire que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
 3. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$ et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
 - C25 Exercice II.11 : Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}$ en utilisant la fonction $P : x \mapsto \int_a^b (xf(t) + g(t))^2 dt$.
 - Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$.
 - Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \geq 0$. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ et si f est paire, $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
 - C25 Exercice II.10 (fait en cours) : soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{C})$. Montrer que $\int_a^b f(t) e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
 - Exemple du cours : calculer la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$ en utilisant des sommes de Riemann.
 - C25 Exercice IV.1.3 : en appliquant Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, calculer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
 - Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice. Montrer que c'est une application linéaire.
 - Donner la définition de noyau et image d'une matrice. Montrer que l'image d'une matrice est engendrée par ses vecteurs colonnes.
 - Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$.
 - Donner la définition de matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, énoncer puis démontrer la formule de changement de base pour une application linéaire.
 - C26 Exercice 11 : Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
 - ▷ Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire avec le noyau et l'image.
 - ▷ Propriétés des projections.
 - ▷ Propriétés des symétries.
 - ▷ Application linéaire complètement déterminée par l'image d'une base.
 - ▷ Lien rang et injectivité/surjectivité.
 - ▷ Rang d'une composée.
 - ▷ Théorème du rang.
 - ▷ Bijectivité automatique en dimension finie.
 - ▷ Lien hyperplan/formes linéaires.
 - ▷ Propriétés de l'intégrale : positivité, croissance, inégalité triangulaire.
 - ▷ Théorème fondamental de l'analyse.
 - ▷ Stricte positivité.

- ▷ Intégration et parité.
- ▷ Théorème de convergence des sommes de Riemann.
- ▷ Inégalité de Taylor-Lagrange.
- ▷ Formule pour la matrice d'une composée.
- ▷ Conditions équivalentes pour l'inversibilité d'une matrice carrée.
- ▷ Matrice d'une projection/symétrie dans une base adaptée.
- ▷ Formule de changement de bases.
- ▷ Lien rangs : Matrice/application linéaire, matrice/famille de vecteurs.

A savoir faire

1. Savoir montrer qu'une application est linéaire/est un endomorphisme.
2. Savoir déterminer une base du noyau/de l'image d'une application linéaire.
3. Savoir déterminer l'expression d'une projection, d'une symétrie.
4. Savoir vérifier qu'un endomorphisme est une projection/une symétrie et trouver ses sous-espaces caractéristiques.
5. Savoir appliquer le théorème du rang.
6. Savoir utiliser une forme linéaire pour justifier qu'un sous-ensemble est un hyperplan.
7. Savoir calculer une intégrale.
8. Savoir encadrer une intégrale.
9. Savoir utiliser le théorème fondamental de l'analyse.
10. Savoir calculer la limite d'une somme de Riemann.
11. Savoir appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
12. Savoir déterminer l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
13. Savoir déterminer le noyau et l'image d'une matrice.
14. Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases.
15. Savoir faire un changement de bases.