

## Contrôle de cours 21 - Matrices - Sujet A

### Jeudi 22 mai 2025

#### Question 1 (3 pts)

Soit  $E$  et  $F$  de dimension finie.

1. Quelle est la dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ ?  $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$
2. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}'_E$  deux bases de  $E$ ,  $\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}'_F$  deux bases de  $F$ .
  - (a) Donner la relation entre  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x))$ .  
 $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$
  - (b) Donner la relation entre  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f)$  et les matrices de passage adéquates.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f) = P_{\mathcal{B}'_F}^{\mathcal{B}_F} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}$$

□

#### Question 2 (5 pts)

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et  $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  sa matrice dans la base canonique notée  $\mathcal{C}$ .

Soit  $f_1 = (0, 1, 0)$ ,  $f_2 = (1, 1, 2)$  et  $f_3 = (2, 2, 3)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Que vaut  $f(1, 0, 0)$ ?  
 On nous demande l'image du premier vecteur de la base canonique. C'est la première colonne de  $A$ :  $f(1, 0, 0) = (6, 5, 6)$ .
2. Vérifier que  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
 Comme  $\mathcal{B}$  est composée de trois vecteurs, il suffit de vérifier qu'ils sont libres : on résout

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  et  $\mathcal{B}$  est libre : c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

3. Déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$  et la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ .  
 La matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$  est la matrice  $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  obtenue en écrivant en colonne les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{C}$  :

$$P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  s'obtient en prenant l'inverse de la précédente en utilisant le pivot de Gauss :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1, L_2 \leftarrow L_1 + 2L_3, L_2 + 2L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On utilise la formule du changement de base :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} A P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

## Contrôle de cours 21 - Matrices - Sujet B

### Jeudi 22 mai 2025

#### Question 1 (3 pts)

Soit  $E$  et  $F$  de dimension finie.

- Quelle est la dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$ ?  $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$
- Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}'_E$  deux bases de  $E$ ,  $\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}'_F$  deux bases de  $F$ .
  - Donner la relation entre  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x))$ .  
 $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$
  - Donner la relation entre  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f)$  et les matrices de passage adéquates.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f) = P_{\mathcal{B}'_F}^{\mathcal{B}_F} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}$$

□

#### Question 2 (5 pts)

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et  $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$  sa matrice dans la base canonique notée  $\mathcal{C}$ .

Soit  $f_1 = (0, 0, 1)$ ,  $f_2 = (2, 1, 1)$  et  $f_3 = (3, 2, 2)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

- Que vaut  $f(1, 0, 0)$ ?  
On nous demande l'image du premier vecteur de la base canonique. C'est la première colonne de  $A$ :  $f(1, 0, 0) = (5, 2, 2)$ .
- Vérifier que  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
Comme  $\mathcal{B}$  est composée de trois vecteurs, il suffit de vérifier qu'ils sont libres : on résout

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \iff \begin{cases} -\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  et  $\mathcal{B}$  est libre :  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- Déterminer la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$  et la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ .  
La matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$  est la matrice  $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  obtenue en écrivant en colonne les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{C}$  :

$$P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  s'obtient en prenant l'inverse de la précédente en utilisant le pivot de Gauss :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1, L_2 \leftarrow L_1 + 2L_3, L_2 + 2L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

On utilise la formule du changement de base :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} A P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□