Chapitre 27 : Variables aléatoires

II. Lois usuelles

II.1. Loi certaine

Définition II.1. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi certaine** si ....
....

II.2. Loi uniforme

Définition II.2. Soit E un ensemble fini de cardinal n. On dit que X suit une **loi uniforme** sur E, et on note $X \sim \mathscr{U}(E)$, si $X(\Omega) = E$ et

....

Exemples II.1.

1. La variable aléatoire qui donne le résultat du lancer d'un dé équilibré suit une loi uniforme sur ....
2. On choisit un entier X au hasard entre -3 et 3. Déterminer la loi de $Y = X^2 + 1$.

II.3. Loi de Bernoulli

Définition II.3. On dit que la variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0,1]$, et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$ si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et

....

Remarque II.1. Une épreuve de Bernoulli est une expérience qui n'a que deux issues : le succès (avec probabilité p) ou l'échec (avec probabilité $1-p$).
Si X est une variable aléatoire qui vaut 1 lorsque l'épreuve est un succès et 0 sinon, alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Exemples II.2.

1. La variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient pile lors d'un lancer d'une pièce équilibrée et 0 sinon suit la loi ....
2. On tire au hasard une boule dans une urne qui contient a boules rouges et b boules bleues. On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 lorsqu'on tire une boule rouge et 0 sinon. Alors $X \sim$ ....
3. Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors $\mathbb{1}_A \sim \mathscr{B}(P(A))$.

4. Soit X une variable aléatoire telle que $P(X=1)=P(X=-1)=\dfrac{1}{2}$. Déterminer les lois de $Y=\dfrac{X+1}{2}$ et de $Z=X^2$.

II.4. Loi binomiale

> **Définition II.4.** Soit X une variable aléatoire et $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p, et on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, si $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et :
>
> ....

Remarque II.2. Si on réalise une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p, alors la variable aléatoire qui compte le nombre total de succès suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.
Par exemple, lorsqu'on réalise n tirages avec remise dans une urne qui contient une proportion p de boules blanches, alors la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues suit $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemples II.3.

1. On lance n fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de piles obtenus. Alors $X \sim$ ....
2. Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires. On tire successivement et avec remise 10 boules et on note X le nombre de boules blanches tirées. Quelle est la loi de X ?
3. Un QCM consiste en 7 questions ayant chacune 4 réponses possibles, une seule étant correcte. On répond au hasard à chaque question en lançant un dé équilibré à 4 faces et on note X le nombre de réponses correctes obtenues. Déterminer $P(X \geq 7/2)$.

III. Espérance, variance et écart-type

III.1. Espérance

Définition III.1. Soit $X : \Omega \to \mathbb{K}$ une variable aléatoire. L'**espérance** de X est le nombre :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Si $E(X) = 0$, on dit que X est une variable **centrée**.

Remarques III.1.

- L'espérance de X s'interprète comme la valeur moyenne prise par X lors d'un grand nombre de répétitions de l'expérience. En effet, la fréquence d'apparition de chaque valeur x de X est environ égale à la probabilité $P(X = x)$, et l'espérance consiste à faire la moyenne du tableau valeurs/fréquences :

valeur	x_1	x_2	...	x_n	Moyenne
fréquence	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_n)$	$x_1 P(X = x_1) + \ldots + x_n P(X = x_n)$

  L'espérance est un indicateur de position.
- Si $X \sim Y$, alors $E(X) = E(Y)$.

Exemple III.1. On lance un dé équilibré à 6 faces. On gagne 0 euros si on obtient 1, 2 ou 3, 10 euros si on obtient 4 ou 5 et 100 euros si on obtient 6. On note X le gain. Déterminer $E(X)$ et interpréter.

Proposition III.1. *Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

1. $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$.
2. *L'espérance est linéaire : pour tous $a, b \in \mathbb{K}$, $E(aX + bY) =$ ....*
3. *Inégalité triangulaire :* ....

Proposition III.2. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.*

1. *L'espérance est positive : si X ne prend que des valeurs positives, alors $E(X) \geq 0$.*
2. *L'espérance est croissante : si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.*

Proposition III.3.

1. *Si X suit la loi certaine de valeur a alors $E(X) = a$.*
2. *Si $X \sim \mathscr{U}([\![a, b]\!])$ et $n = b - a + 1$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.*
3. *Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $E(X) = p$.*
4. *Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.*

Exemples III.2.
1. Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
2. On reprend le QCM de l'exemple II.3. Déterminer $E(X)$.
3. On lance 2 dés équilibrés et on note S la somme obtenue. Déterminer $E(S)$.

Théorème III.4 (Formule de transfert)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

Remarque III.2. On n'a donc pas besoin de connaître la loi de $f(X)$ pour trouver son espérance.

Exemples III.3.
1. Soit $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. Déterminer $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.
2. Soit $Y \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Déterminer $E(Y^2)$.

Théorème III.5 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives. Pour tout $a > 0$,

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Exemple III.4. On lance 100 fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de pile obtenus. Majorer la probabilité de $(X \geq 75)$?

III.2. Variance et écart-type

Définition III.2. Soit X une variable aléatoire réelle. La **variance** de X est le réel :

....

L'**écart-type** de X est le réel $\sigma(X) =$ ....
Lorsque $V(X) = 1$, on dit que X est **réduite**.

Remarques III.3.

- Si $X \sim Y$, alors $V(X) = V(Y)$.
- La variance mesure la moyenne des carrés des écarts de X à sa moyenne. C'est un indicateur de dispersion.

Théorème III.6

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. ***Formule de Huygens :*** $V(X) =$ ....
2. ***Transfert affine :*** *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $V(aX + b) =$* ....

Proposition III.7.

1. *Si X suit une loi certaine, alors $V(X) =$ .....*
2. *Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $V(X) =$ ....*
3. *Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $V(X) =$ ....*
4. *Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors $V(X) =$ ....*

Remarque III.4. Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

Théorème III.8 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire réelle et $a \in]0, +\infty[$, alors $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$.

Remarque III.5. Ainsi, lorsque plus la variance de X est petite, plus la probabilité que X soit éloigné de sa moyenne est petite.

Exemple III.5. On dispose d'une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. On lance n fois la pièce (avec $n \geq 1$) et on note X la nombre de piles obtenus. On pose $F = \dfrac{X}{n}$ la fréquence des piles obtenus. Montrer que pour tout $a > 0$, $P(|F - p| \geq a) \leq \dfrac{p(1-p)}{na^2}$, puis déterminer $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(|F - p| < 10^{-2}) \geq 0,95$.

IV. Couples de variables aléatoires

IV.1. Loi conjointe, lois marginales

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires. Le couple (X, Y) est une variable aléatoire sur Ω : $(X, Y) : \omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in E \times F$. On notera en général $P(X = x, Y = y)$ à la place de $P((X, Y) = (x, y))$.

Définition IV.1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω.

1. La **loi conjointe** de X et Y est la loi du couple (X, Y). Elle est déterminée par la distribution de probabilité $(P(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
2. Les lois de X et Y sont appelées les **lois marginales** du couple (X, Y).

Remarque IV.1. On peut généraliser ces définitions à un n-uplet de variables aléatoires !

Exemples IV.1. 1. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_X et p_Y. On donne $P(X = 0, Y = 0) = \dfrac{1}{3}$, $P(X = 0, Y = 1) = \dfrac{1}{3}$, $P(X = 1, Y = 0) = \dfrac{1}{4}$ et $P(X = 1, Y = 1) = \dfrac{1}{12}$. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).

2. Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On fait deux tirages successifs avec remise et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus. On pose $Y = \min(X_1, X_2)$. Déterminer la loi conjointe de X_1 et Y.

Proposition IV.1. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur Ω. Les lois marginales sont données par :*

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Remarque IV.2. Attention : on ne peut pas en général retrouver la loi conjointe à partir des lois marginales !

Exemples IV.2.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Justifier que $(X, Y) \not\sim (X, X)$.

2. On reprend l'urne avec 3 boules de l'exemple précédent. Déterminer la loi de Y.

Proposition IV.2. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs réelles sur Ω et $Z = X + Y$. La loi de Z est donnée par :*

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P(Z = z) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

IV.2. Indépendance

Définition IV.2. Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω. On dit que X et Y sont **indépendantes**, et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants : ....

Proposition IV.3. *Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω.*

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y).$$

Remarque IV.3. Lorsque X et Y sont indépendantes, les lois marginales suffisent pour retrouver la loi conjointe de (X,Y).

Proposition IV.4. *Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ et $f : E \to E'$ et $g : F \to F'$. Alors si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $f(X) \perp\!\!\!\perp f(Y)$.*

Proposition IV.5. *Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω et à valeurs réelles. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

Remarque IV.4. Attention, la réciproque est fausse !

Exemple IV.3. Soit $X \sim \mathscr{U}(\llbracket -1,1 \rrbracket)$ et $Y^2 = 1 - X^2$. Montrer que $E(XY) = E(X)E(Y)$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition IV.3. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω. On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $A_1 \in \mathscr{P}(X_1(\Omega))$, ..., $A_n \in \mathscr{P}(X_n(\Omega))$, les événements $(X_1 \in A_1)$, ..., $(X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.

Proposition IV.6. *Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω. Elles sont mutuellement indépendantes ssi pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,*

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \text{..}$$

Remarque IV.5. Si des variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes, mais la réciproque n'est pas vraie.

Proposition IV.7. *Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$ et mutuellement indépendantes, alors $E(X_1 X_2 \cdots X_n) =$ ....*

Proposition IV.8. *Soit $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\forall k \in [\![1,n]\!], X_k \sim \mathscr{B}(p)$. Alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.*

Remarque IV.6. On retrouve plus facilement que si $S \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors $E(S) = np$

Proposition IV.9 (Lemme des coalitions). *Soit $n \geq 2$. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$. Soit $m \in [\![1, n-1]\!]$ et $f : E_1 \times \cdots E_m \to F$ et $g : E_{m+1} \times \cdots \times E_n \to F'$. Alors si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, $f(X_1, \dots X_m)$ et $f(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.*

Remarque IV.7. Cette proposition est encore valable si on fait plus de deux coalitions.

Exemple IV.4. Soit $m_{1,1}, m_{1,2}, m_{2,1}, m_{2,2}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi : $P(m_{i,j} = 1) = P(m_{i,j} = -1) = \dfrac{1}{2}$. On note $M = (m_{i,j})$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

IV.3. Covariance

Définition IV.4. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. La **covariance** de X et Y est le réel ....
On dit que X et Y sont **décorrélées** si ....

Proposition IV.10. *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.*

1. $\mathrm{Cov}(X,Y) =$ ....;
2. $V(X+Y) =$ ....;
3. *Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors X et Y sont décorrélées : en particulier, $V(X+Y) =$* ....

Remarques IV.8.
- Plus généralement, si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles sur Ω, alors $V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
- Attention, deux variables décorrélées ne sont pas forcément indépendantes!
- On retrouve facilement la variance de la loi binomiale.

Exemple IV.5. Soit $X \sim \mathscr{U}([\![-1,1]\!])$. Montrer que $\mathrm{Cov}(X, X^2) = 0$ mais que X et X^2 ne sont pas indépendantes.