Variables aléatoires - Exercices

Exercice 1. Dans chaque cas suivant, déterminer la loi de X :

1. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On en choisit 5 au hasard pour former un mot de 5 lettres. On note X le nombre de voyelles de ce mot.
2. Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une au hasard jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. On note alors X le nombre de tirages effectués.
3. On dispose de n boules qu'on dépose au hasard dans trois urnes ($n \geq 3$). On note X le nombre d'urnes vides après avoir placé toutes les boules.

Exercice 2.
1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![0,20]\!]$. Donner la loi de $\left\lfloor \sqrt{X} \right\rfloor$.
2. Soit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$. Calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 3. Soit $n \geq 2$. On lance n fois une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire donnant le numéro du premier jet pour lequel on obtient pile, et valant 0 si on n'obtient jamais pile.
Déterminer la loi de X puis calculer son espérance.

Exercice 4. Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. Un joueur tire N boules dans cette urne successivement et avec remise. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne g points, et chaque boule noire lui fait perdre 2 points.
On note X le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de X.
2. Quelle valeur de g faut-il choisir pour que le jeu soit d'espérance nulle ?

Exercice 5. On considère une urne contenant 5 boules blanches et 5 boules noires et on tire successivement et sans remise toutes les boules. On note X le numéro du premier tirage pour lequel on obtient une boule noire.
Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 6. Une loterie a lieu chaque semaine. On y vend 100 billets de 1 euro dont seulement 3 sont gagnants. On dispose de 5 euros.

1. À votre avis, pour obtenir au moins un billet gagnant, vaut-il mieux acheter 5 billets la même semaine ou bien 1 billet chaque semaine pendant cinq semaines ?
2. On achète 5 billets la même semaine et on note X le nombre de billets gagnants obtenus. Déterminer la loi de X.
3. On achète 1 billet par semaine pendant cinq semaines et on note Y le nombre de billets gagnants obtenus. Déterminer la loi de Y.
4. Conclure.

Exercice 7. Soit n un entier et $p \in]0,1[$. Un fumeur en plein air a n allumettes pour allumer sa cigarette. Chaque allumette a une probabilité p que le vent l'éteigne avant que la cigarette ne soit allumée. Lorsqu'il n'a plus d'allumette, il rentre et utilise un briquet.
On note X le nombre d'allumettes utilisées.

1. Déterminer la loi de X.
2. On note A : « le fumeur a allumé sa cigarette avec une allumette ». Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, calculer $P_A(X=k)$.

Exercice 8. On dispose de deux boîtes A et B. Au départ, la boîte A contient deux jetons marqués 0 et la boîte B contient deux jetons notés 1. On pioche au hasard et simultanément un jeton de A et un jeton de B et on les replace en échangeant les boîtes. On effectue cette manipulation n fois et on note X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des jetons contenus dans A à l'issue des n manipulations.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Exprimer la loi de X_n en fonction de celle de X_{n-1}.
3. En déduire l'espérance de X_n.

Exercice 9. On considère un urne contenant une boule blanche et une boule noire et on effectue des tirages successifs en remettant après chaque tirage la boule tirée et en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches après k tirages.

1. Déterminer les lois de X_0, X_1, X_2 et X_3.
2. Déterminer la loi de X_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Soit X une v.a. suivant la loi $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et Y une v.a. suivant $\mathscr{B}(n, p)$.
Calculer $E(2^X)$ et $E(2^Y)$.

Exercice 11. On considère X et Y deux variables aléatoires définies sur un même EPF.

1. Soit $n, n' \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On suppose que $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, $Y \sim \mathscr{B}(n',p)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$. Montrer que $X+Y \sim \mathscr{B}(n+n',p)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ et $Y \sim \mathscr{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 12. Deux joueurs lancent n fois une pièce équilibrée.

1. Calculer la probabilité que les deux joueurs obtiennent le même nombre de piles.
2. On note Y la différence du nombre de piles du premier et du deuxième joueur. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 13. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On lance n fois de suite une pièce équilibrée. On note S le nombre de séries obtenues, c'est-à-dire le nombre de suites ininterrompues de pile ou face. Par exemple, si en lançant $n = 10$ fois la pièce on obtient $PPFFFPPFPF$, on a $S = 6$ car il y a 6 séries : PP, FFF, PP, F, P, F.
Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on définit X_k par :

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si l'issue du } k\text{-ième lancer diffère de la précédente} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Exprimer S en fonction des X_k.
2. Déterminer les lois des X_k et celle de $S-1$.
3. En déduire le nombre moyen de séries obtenues en lançant n fois la pièce.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n dés cubiques équilibrés. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note X_k le résultat du k-ième dé. On pose $m = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $M = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer $m(\Omega)$ et $M(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in m(\Omega)$, déterminer $P(m \geq k)$. De même, pour tout $k \in M(\Omega)$, déterminer $P(M \leq k)$.
3. Déterminer les lois et espérances de m et M.

Exercice 15 (IMT MP 2018). Soit X une variable aléatoire réelle et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $P(X \geq x) \leq \mathrm{e}^{-2x} E(\mathrm{e}^{2X})$.

Exercice 16 (CCS PSI 2018). Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Donner la loi de S_n, son espérance et sa variance.
2. Soit $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de $\exp\left(\lambda\left(X_1 - \frac{1}{2}\right)\right)$.
3. Soit $\lambda > 0$. Déterminer l'espérance de $\exp(\lambda(S_n - E(S_n)))$.
4. On admet que $\forall \lambda > 0$, $\mathrm{ch}(\lambda) \leq \mathrm{e}^{-\lambda^2/2}$. Soit $t > 0$. Montrer que : $\forall \lambda > 0$, $P(S_n - E(S_n) \geq nt) \leq \mathrm{e}^{n(-\lambda t + \lambda^2/2)}$.
5. Soit t tel que $|t| \leq \frac{1}{2}$. Déterminer le minimum de $\lambda \mapsto -\lambda t + \lambda^2/2$ et en déduire une inégalité.

Exercice 17. À l'entrée d'un restaurant, n personnes donnent leurs manteaux à la consigne. Le repas est bien arrosé et en repartant, chaque personne choisit un manteau au hasard en repartant.
Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la k-ième persone récupère son manteau et 0 sinon. On note $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

1. Décrire l'univers de cette expérience aléatoire.
2. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer $P(X_k = 1)$.
3. Déterminer $E(S_n)$. En donner une interprétation.
4. Pour tous $k \neq l \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer $P((X_k = 1) \cap (X_l = 1))$.
5. Calculer $V(S_n)$.
6. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $n \geq 11$, la probabilité pour que S_n soit au moins égal à 11 est au plus égale à $0,01$.

Exercice 18. Dans une population, une proportion $p \in]0,1[$ d'individus présentent une certaine caractéristique. On choisit un échantillon de n individus et on pose X_i la variable aléatoire valant 1 si le i-ième individu présente la caractéristique et 0 sinon. On considère que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Quelle est la loi suivie par S_n ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de $\dfrac{S_n}{n}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
4. Pour $\varepsilon = 0,05$, quelle valeur choisir pour n pour que $\dfrac{S_n}{n}$ soit voisin de p à ε près avec probabilité supérieure à 95% ?

Exercice 19. Des vaches sont atteintes d'une maladie avec la probabilité $p = 0,15$. Pour dépister la maladie dans une étable de n vaches, on procède à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

- on fait une analyse pour chaque vache;
- on fait un mélange des laits des n vaches, puis si le test est positif, on fait l'analyse pour chaque vache.

On souhaite connaître la méthode la plus économique. Pour cela, on note X_n le nombre d'analyses effectuées pour la deuxième méthode, et on pose $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n et montrer que son espérance vaut $1 + \dfrac{1}{n} - (1-p)^n$.
2. Étudier la fonction $f(x) = \ln(0,85)x + \ln(x)$. Déterminer pour quels entiers n on a $f(n) > 0$.
3. Montrer que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$. En déduire la réponse en fonction de n au problème initial.

Exercice 20. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même EPF indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la loi de U.
2. Calculer $\text{Cov}(U, V)$.
3. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard un nombre X dans $[\![1, n]\!]$. On choisit ensuite au hasard un nombre Y au hasard dans $[\![1, X]\!]$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. En déduire la loi marginale de Y et son espérance.

Exercice 22. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires telles que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \dfrac{1}{2}$.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $E(\cos(tS_n)) = \cos^n(t)$.

Exercice 23 (CCS PC 2018). On considère $2n$ boules, n d'entre elles portant le numéro 0, les autres étant numérotées de 1 à n. On pioche simultanément n boules. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si la boule i a été piochée et à 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X_i et calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$ pour $1 \leq i < j \leq n$.
2. Soit $S = X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$.

Exercice 24. Soit $X_1, \ldots, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

1. On pose $Y_k = X_k + X_{k+1}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
   (a) Déterminer la loi de Y_k.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de Y_k.
   (c) Calculer la covariance de Y_i et Y_j pour $i \neq j$.
2. On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Calculer l'espérance et la variance de T_n.

Exercice 25. On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 définies sur un même EPF et à valeurs dans $[\![1, 6]\!]$. On suppose de plus que X_1 et X_2 sont indépendantes et on note $S = X_1 + X_2$.

Pour $i = 1, 2$, on pose $Q_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} P(X_i = k)X^k$ et $P = \displaystyle\sum_{j=2}^{12} P(S = j)X^j$.

1. Montrer que $P = Q_1 Q_2$.
2. On suppose que $P(X_1 = 6)P(X_2 = 6) \neq 0$. Justifier que Q_1 et Q_2 ont au moins 2 racines réelles (comptées avec multiplicité).
3. Montrer qu'on ne peut pas truquer deux dés de sorte que la somme de leurs valeurs suit une loi uniforme.

Indications - Solutions

Exercice 1 :

1. $X(\Omega) = [\![0,5]\!]$. Il y a $\binom{26}{5}$ tirages possibles. Il y en a $\binom{20}{5}$ qui sont sans voyelle, $\binom{6}{1}\binom{20}{4}$ avec une voyelle, $\binom{6}{2}\binom{20}{3}$ avec une voyelle, etc...

k	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\frac{3876}{16445}$	$\frac{2907}{6578}$	$\frac{855}{3289}$	$\frac{190}{3289}$	$\frac{15}{3289}$	$\frac{3}{32890}$

2. $X(\Omega) = [\![2,5]\!]$. On a fait deux tirages si on a choisi deux fois une boule blanche, trois tirages si on a choisi deux boules blanches et une noire (BNB ou NBB), quatre tirage si on a choisi deux blanches et deux noires (NNBB, NBNB ou BNNB) ou bien quatre noires, cinq tirages si on a choisi deux blanches et trois noires (NNNBB, NNBNB, NBNNB ou BNNNB) ou bien une blanche et quatre noires (BNNNN, NBNNN, NNBNN ou NNNBN). Donc :

k	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$

3. $X(\Omega) = [\![0,2]\!]$.

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{3^{n-1}-2^n-1}{3^{n-1}}$	$\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$	$\frac{1}{3^{n-1}}$

Exercice 2 :

1. On pose $Y = \left\lfloor\sqrt{X}\right\rfloor$. $Y(\Omega) = [\![0,4]\!]$, et $P(Y=0) = \frac{1}{21}$, $P(Y=1) = \frac{3}{21}$, $P(Y=2) = \frac{5}{21}$, $P(Y=3) = \frac{7}{21}$ et $P(Y=4) = \frac{5}{21}$.
2. Formule de transfert : $E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{1}{p(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{n+1-k} = \frac{1}{p(n+1)}(1-(1-p)^{n+1})$.

Exercice 3 : $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$. On note F_k : « on obtient face au k-ième lancer ». On a $(X=k) = F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ et $(X=0) = F_1 \cap \ldots \cap F_n$. Donc $P(X=k) = \frac{1}{2^k}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ et $P(X=0) = \frac{1}{2^n}$ car les évènements sont indépendants et de proba $\frac{1}{2}$.
$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{2^k}$. On pose $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x^k$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $f' : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. Si $x \neq 1$, $f(x) = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}$ de dérivée $f'(x) = \frac{(1-x)(1-(n+1)x^n)+(x-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. Puis $E(X) = \frac{1}{2}f'(1/2)$.

Exercice 4 :

1. $X \sim \mathscr{B}(N, 2/5)$. $E(X) = \frac{2N}{5}$.
2. Notons G le gain. $G = gX - 2(N-X)$, donc $E(G) = \frac{2Ng}{5} - 2N + \frac{4N}{5} = 0 \iff g = 3$.

Exercice 5 : $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{84}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{1}{252}$

et $E(X) = \frac{11}{6}$.

Exercice 6 :

1. On va bien voir...
2. $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$. Il y a $\binom{100}{5}$ façon d'acheter 5 billets parmi 100. Il y a $\binom{97}{5}$ façons d'acheter 5 billets perdants, $\binom{3}{1}\binom{97}{4}$ façons d'acheter 1 gagnant et 4 perdants, etc...

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{27683}{32340}$	$\frac{893}{6468}$	$\frac{19}{3234}$	$\frac{1}{16170}$

3. $Y \sim \mathscr{B}(5, 3/100)$.
4. $P(X \geq 1) = \frac{4657}{32340} \cong 0,144...$ et $P(Y \geq 1) = \frac{1412659743}{10^{10}} \cong 0,141...$, donc la première méthode est un peu mieux.

Exercice 7 :

1. $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, $P(X=k) = p^{k-1}(1-p)$ et $P(X=n) = p^{n-1}(1-p)+p^n = p^{n-1}$.
2. $P_A(X=k) = \frac{P(X=k)P_{(X=k)}(A)}{P(A)}$, or $P(A) = 1-p^n$ et $P_{(X=k)}(A) = 1$ si $k<n$ et $= 1-p$ si $k=n$, donc $P_A(X=k) = p^{k-1}\frac{1-p}{1-p^n}$ si $k<n$ et $= p^{n-1}\frac{1-p}{1-p^n}$ si $k=n$.

Exercice 8 :

1. $X_1(\Omega) = \{1\}$, X_1 suit une loi certaine.
2. $X_n(\Omega) = \{0,1,2\}$, $P(X_n=0) = \frac{1}{4}P(X_{n-1}=1)$, $P(X_n=1) = P(X_{n-1}=0)+\frac{1}{2}P(X_{n-1}=1)+P(X_{n-1}=2)$ et $P(X_n=2) = \frac{1}{4}P(X_{n-1}=1)$.
3. $E(X_n) = 0P(X_n=0)+1P(X_n=1)+2P(X_n=2) = P(X_{n-1}=0)+P(X_{n-1}=1)+P(X_{n-1}=2) = 1$.

Exercice 9 :

1. $X_0(\Omega) = \{1\}$, $X_1(\Omega) = \{1,2\}$, $X_2(\Omega) = \{1,2,3\}$ et $X_3(\Omega) = \{1,2,3,4\}$. $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} = P(X_1 = 2)$, $P(X_2 = 1) = P_{(X_1=1)}(N_2)P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$, $P(X_2 = 2) = P_{(X_1=1)}(B_2)P(X_1 = 1) + P_{(X_1=2)}(N_2)P(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$, $P(X_2 = 3) = \frac{1}{3}$.
2. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que X_k suit la loi uniforme sur $[\![1, k+1]\!]$.
   - Initialisation : question précédente.
   - Hérédité : Supposons que $X_k \sim \mathbb{U}([\![1, k+1]\!])$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $n \in [\![1, k+1]\!]$, $P(X_{k+1} = n) = P_{(X_k=n)}(N_{k+1})P(X_k = n) + P_{(X_k=n-1}(B_{k+1})P(X_k = n-1) = \frac{k+2-n}{k+2}\frac{1}{k+1} + \frac{n-1}{k+2}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+2}$.

Exercice 10 :

- Formule de transfert : $E(2^X) = \sum_{k=1}^{n} 2^k \frac{1}{n} = \frac{2(2^n-1)}{n}$ (somme géométrique).
- Formule de transfert : $E(2^Y) = \sum_{k=1}^{n} 2^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (2p + (1-p))^n = (1+p)^n$.

Exercice 11 :

1. Posons $Z = X + Y$. Déjà, $Z(\Omega) = [\![0, n+n']\!]$. Puis, si $k \in [\![0, n+n']\!]$, $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k-i)$ par indépendance.
   Ensuite, $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n'}{k-i} p^k (1-p)^{n+n'-k}$. Formule de Vandermonde $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n'}{k-i} = \binom{n+n'}{k}$: en effet, pour choisir k entier dans $[\![1, n+n']\!]$, il y a $\binom{n+n'}{k}$ choix possibles, mais on peut aussi en prendre i dans $[\![1, n]\!]$ et $k-i$ dans $[\![n+1, n+n']\!]$ pour i allant de 0 à k.
2. On pose $Z = X + Y$. On a $Z(\Omega) = [\![0, 2n]\!]$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k-i) = \frac{k+1}{(n+1)^2}$ et si $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $P(Z = k) = \sum_{i=k-n}^{n} P(X = i)P(Y = k-i) = \frac{2n-k+1}{(n+1)^2}$.

Exercice 12 :

1. On note X_1 le nombre de piles obtenus par le premier joueur et X_2 le nombre de piles obtenus par le deuxième. On a $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$, $X_1, X_2 \mathscr{B}(n, 1/2)$.
   On cherche $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k, X_2 = k) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = k)$ par indépendance. Donc $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$ (formule de Vandermonde, 11).
2. $Y = X_1 - X_2$. $E(Y) = E(X_1) - E(X_2) = 0$ par linéarité de l'espérance. Puis, $V(Y) = V(X_1 + (-X_2)) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{n}{2}$ par indépendance.

Exercice 13 :

1. $S = 1 + X_2 + \ldots + X_n$.
2. $X_k \sim \mathscr{B}(1/2)$ et $S - 1 \sim \mathscr{B}(n-1, 1/2)$ par indépendance des X_k.
3. $E(S) = \frac{n+1}{2}$.

Exercice 14 :

1. $m(\Omega) = [\![1, 6]\!] = M(\Omega)$.
2. $P(m \geq k) = \left(\frac{6-k+1}{6}\right)^n$ et $P(M \leq k) = \left(\frac{k}{6}\right)^n$.
3.

k	1	2	3	4	5	6
$P(m = k)$	$\frac{6^n - 5^n}{6^n}$	$\frac{5^n - 4^n}{6^n}$	$\frac{4^n - 3^n}{6^n}$	$\frac{3^n - 2^n}{6^n}$	$\frac{2^n - 1}{6^n}$	$\frac{1}{6^n}$

k	1	2	3	4	5	6
$P(M = k)$	$\frac{1}{6^n}$	$\frac{2^n - 1}{6^n}$	$\frac{3^n - 2^n}{6^n}$	$\frac{4^n - 3^n}{6^n}$	$\frac{5^n - 4^n}{6^n}$	$\frac{6^n - 5^n}{6^n}$

Exercice 15 : On applique Markov à la variable e^{2X} qui est positive : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(e^{2X} \geq e^{2x}) \leq \frac{E(e^{2X})}{e^{2x}}$. Or $e^{2X} \geq e^{2x} \iff X \geq x$.

Exercice 16 :

1. $S_n \sim \mathscr{B}(n, 1/2)$ (cours).
2. $Y_1 = \exp(\lambda(X_1 - 1/2))$, $E(Y_1) = e^{\lambda/2} P(X_1 = 1) + e^{-\lambda/2} P(X_1 = 0) = \mathrm{ch}(\lambda/2)$.
3. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes, les $Y_1, \ldots, Y_n$ aussi (lemme des coalitions). Donc $E(Y_1 \cdots Y_n) = E(Y_1) \cdots E(Y_n) = \mathrm{ch}(\lambda/2)^n$. Et $Y_1 \cdots Y_n = \exp(\lambda(S_n - E(S_n)))$.

4. Markov : $P(\exp(\lambda(S_n - E(S_n)) \geq \alpha) \leq \dfrac{\operatorname{ch}(\lambda/2)^n}{\alpha}$. On prend $\alpha = \mathrm{e}^{\lambda n t}$, de sorte que $P(S_n - E(S_n) \geq nt) \leq \operatorname{ch}(\lambda/2)^n \mathrm{e}^{-\lambda n t} \leq \mathrm{e}^{n(\lambda^2/2 - \lambda t)}$.
5. Le minimum est atteint en $\lambda = t$ et vaut $-t^2/2$. On obtient donc : $\forall t \in [-1/2, 1/2]$, $P(S_n - E(S_n) \geq nt) \leq \mathrm{e}^{-nt^2/2}$.

Exercice 17 :

1. On numérote les manteaux et les personnes correspondantes de 1 à n. Alors $\Omega = \{\text{permutations de } [\![1,n]\!]\}$, et la loi est uniforme.
2. Il y a $(n-1)!$ issues dans $(X_k = 1)$ (toutes les permutations possibles pour les manteaux des autres personnes. Donc $P(X_k = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.
3. $E(S_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$. Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $E(X_k) = 0P(X_k = 0) + 1P(X_k = 1) = \dfrac{1}{n}$. Donc $E(S_n) = 1$.
4. $P((X_k = 1) \cap (X_l = 1)) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.
5. $E(X_k X_l) = 1P((X_k = 1) \cap (X_l = 1)) = \dfrac{1}{n(n-1)}$, donc $V(S_n) = E(S_n^2) - E(S_n)^2 = E(X_1^2 + \ldots + X_n^2 + 2X_1X_2 + \ldots) - 1 = 1$.
6. $P(S_n \geq 11) = P(S_n - 1 \geq 10) = P(|S_n - E(S_n)| \geq 10) \leq \dfrac{V(S_n)}{10^2} = 0,01$.

Exercice 18 :

1. $S_n \sim \mathscr{B}(n,p)$.
2. $E(S_n/n) = p$ et $V(S_n/n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.
3. B-T : $P(|S_n/n - p| > \varepsilon) \leq \dfrac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
4. On veut $\dfrac{1}{4n\varepsilon^2} \leq 0,05$, donc $n \geq \dfrac{1}{4\varepsilon^3} = 2000$.

Exercice 19 :

1. Y_n peut prendre deux valeurs : soit $\dfrac{1}{n}$ si le test initial est négatif, et $P(Y_n = 1/n) = (1-p)^n$ (toutes les vaches sont en bonne santé), soit $1 + \dfrac{1}{n}$ sinon, et $P(Y_n = 1 + 1/n) = 1 - (1-p)^n$. Donc $E(Y_n) = \dfrac{1}{n}(1-p)^n + \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)(1 - (1-p)^n) = 1 + \dfrac{1}{n} - (1-p)^n$.
2. f est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \ln(0,85) + \dfrac{1}{x} > 0 \iff x < -\dfrac{1}{\ln(0,85)} \cong 6,2$. De plus, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, puis $f(17) > 0$ et $f(18) < 0$. Donc $f(n) > 0 \iff n \in \{2, 3, \ldots, 17\}$.
3. $E(Y_n) < 1 \iff \dfrac{1}{n} - (0,85)^n < 0 \iff -\ln(n) < n\ln(0,85) \iff f(n) > 0$. Donc $E(Y_n) < 1 \iff n \in \{2, 3, \ldots, 17\}$. Donc la deuxième méthode est plus économique lorsque $2 \leq n \leq 17$.

Exercice 20 :

1. $U(\Omega) = \{0,1,2\}$ et $P(U = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = (1-p)^2$, $P(U = 1) = 2p(1-p)$ et $P(U = 2) = p^2$.
2. $\operatorname{Cov}(U, V) = \operatorname{Cov}(X + Y, X - Y) = E(X^2 - Y^2) - E(X + Y)E(X - Y) = V(X) - V(Y) = 0$.
3. $P(U = 2, V = -1) = 0$ mais $P(U = 2)P(V = -1) \neq 0$.

Exercice 21 :

1. $(X, Y)(\Omega) = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i \geq j\}$. Puis, si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \geq j$, $P(X = i, Y = j) = P(X = i)P_{(X=i)}(Y = j) = \dfrac{1}{ni}$.
2. $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et si $j \in [\![1,n]\!]$, $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} P_{(X=i)}(Y = j)P(X = i) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\dfrac{1}{i}$. $E(Y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=j}^{n}\dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} j = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}\dfrac{i(i+1)}{2} = \dfrac{1}{2n}\sum_{i=2}^{n+1} i = \dfrac{n+3}{4}$.

Exercice 22 : On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : pour $n = 1$, $E(\cos(tS_1)) = E(\cos(tX_1)) = \dfrac{1}{2}\cos(t) + \dfrac{1}{2}\cos(-t) = \cos(t)$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $E(\cos(tS_n)) = \cos^n(t)$.
  $E(\cos(tS_{n+1})) = E(\cos(tS_n + tX_{n+1})) = E(\cos(tS_n)\cos(tX_{n+1}) - \sin(tS_n)\sin(tX_{n+1}))$. On utilise le lemme des coalitions pour justifier que $\cos(tS_n)$ et $\cos(tX_{n+1})$ sont indépendantes et $\sin(tS_n)$ et $\sin(tX_{n+1})$ aussi. Donc $E(tS_{n+1}) = E(\cos(tS_n))E(\cos(tX_{n+1})) - E(\sin(tS_n))E(\sin(tX_{n+1}))$. Or $E(\sin(tX_{n+1})) = 0$, donc $E(tS_{n+1}) = \cos^n(t)\cos(t) = \cos^{n+1}(t)$.

Exercice 23 :

1. X_i suit une loi de Bernoulli avec $P(X_i = 0) = \dbinom{2n-1}{n} / \dbinom{2n}{n} = \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$.
   $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = P(X_i = 1, X_j = 1) - \dfrac{1}{4} = \dbinom{2n-2}{n-2} / \dbinom{2n}{n} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{n(n-1)}{(2n)(2n-1)} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{2n-2-2n+1}{4(2n-1)} = -\dfrac{1}{8n-4}$.
2. $E(S) = \dfrac{n}{2}$, $V(S) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = \dfrac{n^2}{8n-4}$.

Exercice 24 :

1. (a) $Y_k(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $P(Y_k = 0) = (1-p)^2$, $P(Y_k = 2) = p^2$, $P(Y_k = 1) = 2p(1-p)$.
   (b) $E(Y_k) = 2p$, $V(Y_k) = V(X_k) + V(X_{k+1}) = 2p(1-p)$.
   (c) $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ si $|i-j| > 1$ car elles sont indépendantes. Si $j = i+1$, $\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = E(Y_i Y_{i+1}) - 4p^2 = E(X_i X_{i+1}) + E(X_{i+1}^2) + E(X_i X_{i+2}) + E(X_{i+1} X_{i+2}) - 4p^2 = 3p^2 + p - 4p^2 = p(1-p)$.
2. $E(T_n) = 2p$, $V(T_n) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + \dfrac{2}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n} \text{Cov}(Y_i, Y_j) = \dfrac{2p(1-p)}{n} + \dfrac{2}{n^2}\sum_{1\le i<n} \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \dfrac{2p(1-p)}{n} + \dfrac{2(n-1)p(1-p)}{n^2}$.

Exercice 25 :

1. $P = \displaystyle\sum_{j=2}^{12}\left(\sum_{i=1}^{j-1} P(X_1 = i)P(X_2 = j-i)\right)X^j = Q_1 Q_2$.
2. $Q_1 = XR_1$ avec R_1 de degré impair (5), donc R_1 admet au moins une racine réelle. De même pour R_2.
3. On raisonne par l'absurde et on note X_1 et X_2 les variables aléatoires donnant le résultat des deux dés. Déjà, $P(S = 12) = P(X_1 = 6)P(X_2 = 6) \neq 0$. Donc Q_1 et Q_2 admettent au moins deux racines réelles et P admet au moins 4 racines réelles. Or, $P = \dfrac{1}{11}X^2(1 + X + X^2 + \cdots + X^{10}) = \dfrac{1}{11}X^2\dfrac{1-X^{11}}{1-X}$ qui n'admet que 0 comme racine double et aucune autre racine réelle.