

Séries numériques - Exercices

Exercice 1. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$	5. $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$	9. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} \cos(n)}{n^2}$
2. $\sum_{n \geq 1} (1 - e^{-\frac{1}{n^2}})$	6. $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$	10. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n) + \arctan(n)}{n+1}$
3. $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right)$	7. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$	11. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - \ln(n)}$	8. $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$	12. $\sum_{n \geq 0} n^{10} e^{-n^2}$

Exercice 2. Pour quelles valeurs de x les séries de termes généraux suivants convergent ?

1. $u_n = \frac{\sin(nx)}{n^2}$	2. $v_n = nx^n$.
---------------------------------	-------------------

Exercice 3. 1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Montrer que les suites (S_{2p}) et (S_{2p+1}) sont adjacentes.

2. Pour quelles valeurs de x la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge-t-elle ?

Exercice 4. Justifier la convergence puis calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$	2. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$	3. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n 2^{3n-2}}{3^{2n+1}}$	4. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{n!}$
--	--	---	--

Exercice 5. 1. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ converge. On note S sa somme.

2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}.$$

3. En déduire la valeur de S .

4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 6. Pour quelles valeurs de a, b et $c \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geq 2} (a\sqrt{n} + b\sqrt{n-1} + c\sqrt{n-2})$ converge-t-elle ? Donner la somme dans ces cas.

Exercice 7. 1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{3^n}$ converge. On note S sa somme.

2. Soit $N \geq 1$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^N x^n$. Pour $x \neq 1$, déterminer une expression sans \sum de $f(x)$ puis de $f'(x)$.

3. En déduire la valeur de S .

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. Déterminer un équivalent de $(u_{n+1} - u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel noté γ .

3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et déterminer un équivalent de ses sommes partielles.

Exercice 9. On pose $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ pour $n \geq 1$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

2. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que : $n! \sim C\sqrt{n}n^n e^{-n}$.

3. On a démontré dans le chapitre sur l'intégration que : $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+2)}}$.
Déterminer la valeur de C .

Exercice 10. 1. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

- Si $|\ell| < 1$, montrer que la série $\sum u_n$ converge.
 - Si $|\ell| > 1$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
 - Donner un exemple de suite (u_n) telle que $\ell = 1$ et la série $\sum u_n$ diverge, puis un exemple avec $\ell = 1$ et la série $\sum u_n$ converge.
2. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n} a^n$ pour $a > 0$.

Exercice 11 (Séries de Bertrand). On considère la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, où α et β sont des réels fixés.

- Pour quelles valeurs de α et β la série diverge-t-elle grossièrement?
- Montrer que si $\alpha > 1$, alors la série converge quelle que soit la valeur de β .
- Montrer que si $\alpha < 1$, alors la série diverge quelle que soit la valeur de β .
- On suppose maintenant que $\alpha = 1$.
 - Si $\beta \leq 0$, montrer que la série diverge.
 - On suppose que $\beta > 0$.
 - Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.
 - En déduire la nature de la série.
- Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n})$?

Exercice 12. Soit $\alpha > 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la série $\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
- Soit $a > 0$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}$.
- En déduire un équivalent simple de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- Pour quelles valeurs de α la série $\sum R_n$ converge-t-elle?

Exercice 13. On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

- Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ à l'aide de u_n
- Quelle est la nature de la série $\sum u_n^2$?
- Déterminer la nature de la série $\sum u_n$. On pourra poser $v_n = \ln(u_n)$ en justifiant l'existence.

Exercice 14. Pour $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

- En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer la limite de $(1-\alpha)\zeta(\alpha)$ lorsque α tend vers 1^+ .
- En déduire un équivalent de $\zeta(\alpha)$ lorsque $\alpha \rightarrow 1^+$.

Exercice 15. On considère A l'ensemble des entiers naturels non nuls qui s'écrivent sans le chiffre 9. On note (u_n) la suite croissante des éléments de A .

- Soit $m \geq 1$. Déterminer le nombre de chiffres de m en fonction de m .
- Soit $n \geq 0$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$. Justifier que $S_n \leq \sum_{k=1}^{[\log_{10}(u_n)]+1} \frac{9^k}{10^{k-1}}$.
- En déduire que la série $\sum \frac{1}{u_n}$ converge.