# Matrices et applications linéaires - Exercices

**Exercice 1.** Pour chaque matrice, déterminer l'application linéaire canoniquement associée puis son noyau, son rang et son image.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 4. $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 2.** Pour chaque application linéaire, déterminer sa matrice dans les bases canoniques, puis dire si l'application est injective, surjective, bijective.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x+3y, 3x-5y)$ ;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x-3y, x+y)$ ;
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (2x-y, x+y, x-y)$ ;
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x+y, y-z)$ ;
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, x-z, x+z)$.

**Exercice 3.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ son application linéaire canoniquement associée.

1. Déterminer l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = 4u$.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = 2u$.
3. Soit $e_2 \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul tel que $f(e_2) = 2e_2$. Déterminer un vecteur $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(e_3) = 2e_3 + e_2$.
4. Justifier qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $f$ est $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 4.** Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit l'application linéaire $f_m(x, y, z) = (mx + y + (2m-1)z, x + (1-m)y, x - y + (2-m)z)$.

1. Déterminer la matrice $A$ canoniquement associée à $f_m$.
2. Pour quelles valeurs de $m$ la rang de $A$ vaut-il 3 ? Que peut-on dire de $f_m$ dans ce cas ?
3. Déterminer le noyau de $A$ en fonction de $m$.

**Exercice 5.**

1. Soit $\varphi : P \in \mathbb{C}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{C}_3[X]$. Déterminer la matrice de $\varphi$ dans les bases canoniques.
2. Soit $\psi : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{C}$. Déterminer la matrice de $\psi$ dans les bases canoniques.
3. Soit $P_1 = 3X + 2$ et $P_2 = 2X + 3$. Montrer que $(P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$ et donner la matrice de $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_1[X])$ définie par $f(P) = P'$ dans cette base.

**Exercice 6.** Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P) = (X^2 - X + 1)P' - (2X-1)P + X^2 P(1)$.

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Est-ce que $\varphi$ est un automorphisme ?

**Exercice 7.** On considère l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_m[X]$ dont la matrice dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Que valent $m$ et $n$ ?
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer l'expression de $f(P)$.

**Exercice 8.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par $\varphi(M) = AM - MA$.
Déterminer la matrice de $\varphi$ dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 9.** Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $d : f \in E \mapsto f' \in E$. On note $F = \mathrm{Vect}(\sin,\cos,\mathrm{ch},\mathrm{sh})$.

1. (a) Donner la dimension de $F$ et montrer que $F$ est stable par $d$. On note $\varphi \in \mathscr{L}(F)$ l'endomorphisme induit par $d$.
   (b) Écrire la matrice $M$ de $\varphi$ dans la base $\mathscr{B} = (\sin,\cos,\mathrm{ch},\mathrm{sh})$. Calculer $M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que $\varphi$ est un automorphisme et écrire $M^{-1}$.
2. Déterminer $\ker(\varphi - \mathrm{id}_F)$ et $\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{id}_F)$ en utilisant $M$.
   En déduire les solutions dans $F$ de $y' - y = \mathrm{e}^{-t} + \sin(t)$.

**Exercice 10.** 1. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ définit par $\varphi(P) = P(X+1)$. Donner la matrice $A$ de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ puis calculer $A^{-1}$.

2. Soit $\psi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_6[X])$ définit par $\psi(P) = P(1-X)$. Donner la matrice $B$ de $\psi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_6[X]$ puis calculer $B^{-1}$.

**Exercice 11.** 1. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

2. Montrer que $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques.

**Exercice 12.** Soit $E$ de dimension $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.
2. On se donne un tel $x$. Montrer que $\mathscr{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de $E$.
3. Déterminer la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$.

**Exercice 13.** Soient $u = (0,1,1)$, $v = (2,0,-1)$ et $w = (2,1,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $z = (4,-1,1)$. Déterminer les coordonnées de $z$ dans la base $(u,v,w)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base $(u,v,w)$ sont $(-1,-8,4)$. Déterminer les coordonnées de $x$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 14.** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$. On pose $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,-1,0)$ et $f_3 = (1,0,1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$.
3. En déduire $A^n$.

**Exercice 15.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $\varphi(P) = P + (X-a)P' + (X-a)^2 P''$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

**Exercice 16.** 1. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $p$ un projecteur de $E$. On pose $r = \mathrm{rg}(p)$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$.

Soit $s \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ la symétrie par rapport au plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - z = 0$ parallèlement à la droite $\mathscr{D} = \mathrm{Vect}((-1,-1,1))$.

2. Écrire la matrice de $s$ dans une base adaptée à la somme directe $\mathscr{P} \oplus \mathscr{D}$.
3. En déduire la matrice de $s$ dans la base canonique.

**Exercice 17.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. On considère $f$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base et la dimension de $F = \ker(f - \mathrm{id}_E)$, $G = \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $H = \ker(f + 4\,\mathrm{id}_E)$.
2. Déterminer une base $\mathscr{C}$ de $E$ dans laquelle la matrice $D$ de $f$ est diagonale.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de $A^n$ faisant intervenir les matrices de passages de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.

**Exercice 18 (CCP PC 2018).** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Donner une base de $\mathrm{Im}(A)$.
2. Donner une base de $\ker(A)$.
3. Déterminer $(Q, P) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ tel que $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer la dimension de $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MA = 0_{3,4}\}$.

**Exercice 19.** Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice non nulle telle que $M^2 = 0_2$. Montrer que $M$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 20 (Mines-Ponts PC 2018).** Soit $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, $F_0 = 1$ et $F_k = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (F_0, F_1, \dots, F_n)$ est une base de $E_n$.
2. Pour tout $P \in E_n$, on pose $\Phi(P) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que $\Phi$ est un endomorphisme de $E_n$.
3. Donner la matrice de $\Phi$ dans la base $\mathscr{B}$.
4. Soit $Q \in E_{n-1}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E_n$ tel que $\Phi(P) = Q$ et $P(0) = 0$.
5. On prend $n = 3$ et $Q = X^2$.
   (a) Exprimer $Q$ dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En déduire $P$ tel que $\Phi(P) = X^2$ et $P(0) = 0$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} k^2$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

# Indications - Solutions

**Exercice 1 :**

1. $\varphi_A(x,y,z)=(x+y+z,x+y+z,x+y+z)$, $\ker(A)=\{(-y-z,y,z),\ y,z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$, $\mathrm{rg}(A)=1$ et $\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Vect}((1,1,1))$.
2. $\varphi_B(x,y,z)=(-x+y+z,3x-2y-4z,-2x+y+3z)$, $\ker(B)=\mathrm{Vect}((-2,-1,-1))$, $\mathrm{rg}=2$ et $\mathrm{Im}(B)=\mathrm{Vect}((-1,3,-2),(1,-2,1)))$.
3. $\varphi_C(x,y,z)=(y+z,x+z,x+y)$, $\ker(C)=\{0\}$, $\mathrm{rg}(C)=3$ et $\mathrm{Im}(C)=\mathbb{R}^3$.
4. $\varphi_D(x,y,z,t)=(y-t,x+z,-y-t,-x-z)$, $\ker(D)=\mathrm{Vect}((1,0,-1,0))$, $\mathrm{rg}(D)=3$ et $\mathrm{Im}(D)=\mathrm{Vect}((0,1,0,-1),(1,0,-1,0),(-1,0,-1,0))$.

**Exercice 2 :**

1. $M=\begin{pmatrix}2&3\\3&-5\end{pmatrix}$ qui est inversible, donc $f$ est bijective.
2. $M=\begin{pmatrix}2&-3\\1&1\end{pmatrix}$ qui est inversible, donc $f$ est bijective.
3. $M=\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ qui est de rang 2, donc $f$ est injective mais pas surjective.
4. $M=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$ qui est de rang 2, donc $f$ est surjective mais pas injective.
5. $M=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$ qui est de rang 2, donc $f$ n'est ni injective, ni surjective.

**Exercice 3 :**

1. On résout l'équation $AX=4X$, on trouve $\mathrm{Vect}((1,0,1))$.
2. $\mathrm{Vect}((1,2,-1))$.
3. Prenons $e_2=(1,2,-1)$. On résout $AX-2X=e_2$. On trouve $e_3=(0,1,0)$.
4. On prend la base $(e_1,e_2,e_3)$ !

**Exercice 4 :**

1. $A=\begin{pmatrix}m&1&2m-1\\1&1-m&0\\1&-1&2-m\end{pmatrix}$
2. Pour $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,2\}$.
3. Pour $m=2$, $\ker(A)=\mathrm{Vect}((-1,-1,1))$. Pour $m=0$, $\ker(A)=\mathrm{Vect}((-1,1,1))$. Pour $m=-1$, $\ker(A)=\mathrm{Vect}((-2,1,1))$. Sinon, $\ker(A)=\{0\}$.

**Exercice 5 :**

1. $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\varphi)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.
2. $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\psi)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\cdots&\frac{1}{n+1}\end{pmatrix}$.
3. Comme $\dim(\mathbb{R}_1[X])=2$, il suffit de vérifier que $(P_1,P_2)$ est libre. Puis $f(P_1)=3=\frac{3}{5}(3P_2-2P_1)$ et $f(P_2)=2=\frac{2}{5}(3P_2-2P_1)$.

**Exercice 6 :**

1. On applique la définition pour la linéarité. Puis, $\varphi(P)=\left(X^2P'-2XP\right)+\left((1-X)P'+P+X^2P(1)\right)$, et $\deg(X^2P'-2XP)\leq 2$ (les coefficients dominants s'annulent) et $\deg((1-X)P'+P+X^2P(1))\leq 2$.
2. $\varphi(1)=X^2-2X+1$, $\varphi(X)=1$ et $\varphi(X^2)=2X$.
3. On échelonne la matrice. On trouve $\mathrm{rg}(\varphi)=3$ donc c'est un automorphisme.

**Exercice 7 :**

1. On a $\dim(\mathbb{R}_n[X])=4$ et $\dim(\mathbb{R}_m[X])=3$ donc $n=3$ et $m=2$.
2. $P=aX^3+bX^2+cX+d$ et $f(P)=3aX^2+2bX+c=P'$.

**Exercice 8 :** $\varphi(E_{11})=-2E_{12}+3E_{21}$, $\varphi(E_{12})=E_{12}-3E_{21}-3E_{22}$, $\varphi(E_{21})=2E_{11}+3E_{21}-2E_{22}$ et $\varphi(E_{22})=2E_{12}-3E_{21}$.

**Exercice 9 :**

1. (a) On vérifie que la famille $(\sin,\cos,\mathrm{ch},\mathrm{sh})$ est libre : on prend $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\lambda_4\in\mathbb{R}$ tels que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda_1\sin(x)+\lambda_2\cos(x)+\lambda_3\mathrm{ch}(x)+\lambda_4\mathrm{sh}(x)=0$. En prenant $x=0$, $x=\pi$ et $x=-\pi$, on trouve $\lambda_3=\lambda_2=0$, puis $\lambda_4=0$ et enfin $\lambda_1=0$.
Ainsi, $\dim(F)=4$.
De plus, $d(\sin)=\cos\in F$, $d(\cos)=-\sin\in F$, $d(\mathrm{ch})=\mathrm{sh}\in F$ et $d(\mathrm{sh})=\mathrm{ch}\in F$, donc $F$ est stable par $d$.
   (b) D'après les valeurs trouvées ci-dessus : $M=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. On remarque que $d^2(\mathrm{ch})=\mathrm{ch}$ et $d^2(\mathrm{sh})=\mathrm{ch}$, donc pour tout $n$ pair, $d^n(\mathrm{ch})=\mathrm{ch}$ et $d^n(\mathrm{sh})=\mathrm{sh}$ et si $n$ est impair, $d^n(\mathrm{ch})=\mathrm{sh}$ et $d^n(\mathrm{sh})=\mathrm{ch}$.

De même si $n=4k$, $d^n(\sin)=\sin$, $d^n(\cos)=\cos$, $d^{n+1}(\sin)=\cos$, $d^{n+1}(\cos)=-\sin$, $d^{n+2}(\sin)=-\sin$, $d^{n+2}(\cos)=-\cos$, $d^{n+3}(\sin)=-\cos$, et $d^{n+3}(\cos)=\sin$.

Donc si $n=4k$ : $M^n=I_4$, $M^{n+1}=M$, $M^{n+2}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ et $M^{n+3}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

(c) On remarque que $M^4=I_4$, donc $M\in GL_4(\mathbb{R})$ et $M^{-1}=M^3$.

2. On cherche $\ker(M-I_4)=\mathrm{Vect}((0,0,1,1))$, donc $\ker(\varphi-\mathrm{id}_F)=\mathrm{Vect}(\mathrm{ch}+\mathrm{sh})=\mathrm{Vect}(\exp)$.
Puis $\mathrm{Im}(M+I_4)=\mathrm{Vect}((-1,1,0,0),(1,1,0,0),(0,0,-1,1))$, et $\mathrm{Im}(\varphi-\mathrm{id}_F)=\mathrm{Vect}(\cos-\sin,\sin+\cos,\mathrm{e}^{-t})$.
On a une solution particulière donnée par $f_0 : t\mapsto \mathrm{sh}(t)+\frac{1}{2}(\cos(t)-\sin(t))$ et la solution générale de l'équation homogène : $f_h : t\mapsto C\mathrm{e}^t$ pour $C\in\mathbb{R}$.

**Exercice 10 :**

1. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. $\varphi^{-1}(P)=P(X-1)$, donc $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&-2&3\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.
2. On applique de nouveau Newton. On remarque aussi que $\psi\circ\psi=\mathrm{id}$, donc $\psi^{-1}=\psi$ et $B^{-1}=B$.

**Exercice 11 :**

1. On vérifie que $P^2=P$. $\ker(P)=\mathrm{Vect}((1,0,0))$ et $\mathrm{Im}(P)=\mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$.
2. On vérifie que $S^2=I_3$. $\ker(S-I_3)=\mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1))$ et $\ker(S+I_3)=\mathrm{Vect}((1,0,0))$. On remarque aussi que $S=2P-I_3$.

**Exercice 12 :**

1. Comme $f^{n-1}\neq 0$, il existe $x\in E$ tel que $f^{n-1}(x)\neq 0$.
2. Il suffit de montrer que $\mathscr{B}$ est libre. En prenant une relation de liaison $\lambda_0 x+\lambda_1 f(x)+\ldots+\lambda_{n-1}f^{n-1}(x)=0$, puis on applique $f^{n-1}$ pour trouver $\lambda_0 f^{n-1}(x)=0$, donc $\lambda_0=0$. On reprend la relation et on applique $f^{n-2}$ pour trouver $\lambda_1=0$ et ainsi de suite.
3. $\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\1&\ddots&&&\vdots\\0&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}$

**Exercice 13 :**

1. On peut par exemple échelonner la matrice $P=\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ pour montrer que la famille est de rang 3.
2. $P$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $(u,v,w)$. Pour trouver les coordonnées de $z$ dans la base $(u,v,w)$, on calcule donc $P^{-1}z=(-5,-2,4)$.
3. On calcule $Px=(-8,3,11)$.

**Exercice 14 :**

1. On pose $P$ la matrice associée à $(f_1,f_2,f_3)$ et on l'échelonne.
2. On applique la formule de changement de bases : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}=D$
3. $A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}2^n+1&1&-2^n-1\\-2^n+1&1&2^n-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

**Exercice 15 :** On résout les quatre équations $\varphi(P)=P$, $\varphi(P)=2P$, $\varphi(P)=5P$ et $\varphi(P)=10P$. Pour cela, on écrit la matrice de $\varphi$ dans la base canonique puis on pose les systèmes. On trouve $P_1=1$, $P_2=X-a$, $P_5=(X-a)^2$ et $P_{10}=(X-a)^3$ qui forment la base voulue.

**Exercice 16 :**

1. D'après le cours, $E=\mathrm{Im}(p)\oplus\ker(p)$. On prend une base de $E$ adaptée à la somme directe $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_r,e_{r+1},\ldots,e_n)$, et la matrice de $p$ dans cette base est bien de la forme voulue car pour $i\in[\![1,r]\!]$, $e_i\in\mathrm{Im}(p)$, donc $p(e_i)=e_i$ et pour $i\in[\![r+1,n]\!]$, $e_i\in\ker(p)$, donc $p(e_i)=0_E$.
2. $\mathscr{P}=\mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,1))$. Dans la base $\mathscr{B}=((-1,-1,1),(1,-1,0),(1,0,1))$ la matrice de $s$ est $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
3. Dans la base canonique, on obtient $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(s)=P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

**Exercice 17 :**

1. On résout les systèmes idoines : $F = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3)$, $G = \mathrm{Vect}(4e_1+3e_2-2e_3))$ et $H = \mathrm{Vect}(2e_1-3e_2+2e_3)$ qui sont tous les trois de dimension 1.
2. On prend $f_1 = e_1+e_2+e_3$, $f_2 = 4e_1+3e_2-2e_3$ et $f_3 = 2e_1-3e_2+2e_3$ qui forme bien une base de $E$. De plus, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \mathrm{diag}(1,2,-4)$.
3. On note $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$. Alors $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1,2,-4)$ d'après la question précédente. Puis, $P^{-1}A^nP = \mathrm{diag}(1,2^n,(-4)^n)$.

**Exercice 18 :**

1. On peut remarquer que les deux premières colonnes de $A$ sont colinéaires, et que $C_1 - C_4 = -3C_3$ et que $C_1$ et $C_4$ sont libres. Donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,4,6))$, et les deux colonnes forment une base de $\mathrm{Im}(A)$.
2. On a $\dim(\ker(A)) = 4-\mathrm{rg}(A) = 2$ et $(-1,1,0,0) \in \ker(A)$ et $(1,0,3,-1) \in \ker(A)$. Les vecteurs $(-1,1,0,0)$ et $(1,0,3,-1)$ sont linéairement indépendants, donc forment une base de $\ker(A)$.
3. On considère $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. On pose $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (1,4,6)$, qui sont dans l'image de $u$. On trouve ensuite $f_1 = (1,0,0,0)$, $f_2 = (0,0,0,1)$, $f_3 = (-1,1,0,0)$ et $f_4 = (1,0,3,-1)$ de sorte que $u(f_1) = e_1$, $u(f_2) = e_2$, $u(f_3) = u(f_4) = 0$. On complète $(e_1,e_2)$ en une base de $\mathbb{R}^3$ avec $e_3 = (0,0,1)$ par exemple. On prend $P$ la matrice de passage de la base canonique à la base $(f_1,f_2,f_3,f_4)$ et $Q$ la matrice de passage de la base canonique à la base $(e_1,e_2,e_3)$.
4. Notons $C = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MA = 0\}$. On a $M \in C \iff MQQ^{-1}AP = 0_{3,4}$. On commence donc par résoudre $ND = 0_{3,4}$ avec $D = Q^{-1}AP$. On note $N = (n_{ij})$ et on obtient
$$ND = 0_{3,4} \iff n_{11} = n_{2,1} = n_{31} = n_{21} = n_{22} = n_{32} = 0$$
Ainsi, $M \in C \iff MQ = aE_{3,1} + bE_{3,2} + cE_{3,3} \iff M \in \mathrm{Vect}(E_{3,1}Q, E_{3,2}Q, E_{3,3}Q)$. On vérifie ensuite que les trois matrices sont libres car $E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}$ sont libres et $Q$ est inversible, donc $\dim(C) = 3$.

**Exercice 19 :** On note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $M$. Alors $u^2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C}^2)}$. Comme $M$ est non nulle, $u$ est non nul, donc il existe $e \in \mathbb{C}^2$ tel que $u(e) \neq 0_{\mathbb{C}^2}$. De plus, $u(e) \in \ker(u)$ car $u^2(e) = 0_{\mathbb{C}^2}$. Ainsi, $(u(e), e)$ forme une famille libre donc une base de $\mathbb{C}^2$. La matrice de $u$ dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M$ est bien semblable à cette matrice.

**Exercice 20 :**

1. La famille est échelonnée en degrés, donc libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de $E_n$, c'est une base de $E_n$.
2. Pour $P \in E_n$, $\deg(P(X+1) - P(X)) \leq n$, donc $\Phi(P) \in E_n$. Puis, on vérifie la linéarité facilement.
3. $\Phi(F_0) = 0$, $\Phi(F_1) = 1$, puis si $k \geq 2$, $F_k(X+1) - F_k(X) = \dfrac{(X+1)X\ldots(X-k+2)}{k!} - \dfrac{X\ldots(X-k+2)(X-k+1)}{k!} = \dfrac{X\ldots(X-k+2)}{k!}(X+1-X+k-1) = F_{k-1}$. Donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
4. On remarque que d'après la question précédente, $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{Vect}(F_0,\ldots,F_{n-1}) = E_{n-1}$. On pose $H = \{P \in E_n \mid P(0) = 0\}$. C'est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc un hyperplan de $E_n$. De plus, $\ker(\Phi) = \mathrm{Vect}(F_0)$ est un supplémentaire de $H$ dans $E_n$. D'après le théorème du rang (version géométrique), $\Phi_S : H \to E_{n-1}$ est un isomorphisme.
5. (a) $F_2 = \dfrac{X^2-X}{2}$, $F_1 = X$ et $F_0 = 1$, donc $Q = 2F_2 + F_1$.
   (b) On a $\Phi(F_3) = F_2$ et $\Phi(F_2) = F_1$, donc en posant $P = 2F_3 + F_2$, on trouve $\Phi(P) = X^2$ et $P(0) = 0$.
   (c) On obtient donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k+1) - P(k) = k^2$. En sommant de 0 à $m$,
$$\sum_{k=0}^{m} k^2 = \sum_{k=0}^{m} P(k+1) - P(k) = P(m+1) - P(0) = 2\frac{(m+1)m(m-1)}{6} + \frac{(m+1)m}{2} = \frac{m(m+1)(2m-2+3)}{6}.$$