Colles 29 - 02/06/2025 au 06/06/2025

Thèmes traités en classe

- Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires.
  Exercices traités en classe : 1, 2, 3, 5, 6, 11, 14, 9,12,15,17,18,19.
- Chapitre 27 : Variables aléatoires.
  1. Définition, loi, image d'une variable aléatoire.
  2. Espérance : définition, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, formule de transfert, inégalité de Markov.
  3. Variance, écart-type : définition, formule de Huygens, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  4. Lois usuelles, espérances et variances.
  5. Couples de variables aléatoires : loi conjointe, lois marginales.
  6. Indépendance : définition, lemme des coalitions, espérance d'un produit de variables indépendantes.
  7. Covariance : définition, variance d'une somme.

  Exercices traités en classe : 1, 2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 23.
- Chapitre 28 : Séries numériques.
  1. Vocabulaire : sommes partielles, somme, reste.
  2. Séries de référence : exponentielle, géométrique, Riemann.
  3. Divergence grossière.
  4. Lien suite-série.
  5. Critères de convergence pour les séries à termes positifs.
  6. Comparaison série-intégrale.
  7. Convergence absolue.

  Exercices traités en classe : 1, 2, 3.

Questions de cours

Question 1

- C25 Exercice II.11 : Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t}$ en utilisant la fonction $P : x \mapsto \int_a^b (xf(t)+g(t))^2\mathrm{d}t$.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \geq 0$. Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0$ et si f est paire, $\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$.
- C25 Exercice II.10 (fait en cours) : soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Exemple du cours : calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ en utilisant des sommes de Riemann.
- C25 Exercice IV.1.3 : en appliquant Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, calculer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
- Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice. Montrer que c'est une application linéaire.
- Donner la définition de noyau et image d'une matrice. Montrer que l'image d'une matrice est engendrée par ses vecteurs colonnes.

- Soit $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$.
- Donner la définition de matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$, énoncer puis démontrer la formule de changement de base pour une application linéaire.
- C26 Exercice 11 : Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.
- C26 Exercice 12 : soit E de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
  - ▷ Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
  - ▷ Donner la matrice de f dans cette base.
- C26 Exercice 17 : soit E de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
  - ▷ Déterminer une base de $F = \ker(f - \mathrm{id}_E)$, $G = \ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $H = \ker(f + 4\,\mathrm{id}_E)$.
  - ▷ Déterminer une base $\mathscr{C}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale et préciser les matrices de passage entre $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ et la relation entre toutes ces matrices.
- Rappeler les lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale) et leurs espérances et variances. Démontrer la formule pour l'espérance d'une uniforme et d'une bninomiale.
- Énoncer la formule de transfert puis exercice 10 : soit $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et $Y \sim \mathscr{B}(n,p)$. Calculer $E(2^X)$ et $E(2^Y)$.
- Donner la définition de la variance et démontrer la formule de Huygens.
- Énoncer les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev. Démontrer Markov.
- Donner la définition de covariance de deux variables aléatoires puis exercice 20 : soit X et Y qui suivent $\mathscr{B}(p)$ (avec $p \in]0,1[$) et $X \perp\!\!\!\perp Y$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Donner la loi de U, calculer $\mathrm{Cov}(U,V)$, justifier que U et V ne sont pas indépendantes.
- Énoncer le lemme des coalitions. Exemple du cours : soit $m_{1,1}, m_{1,2}, m_{2,1}, m_{2,2}$ quatre variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi : $P(m_{i,j} = 1) = P(m_{i,j} = -1) = \dfrac{1}{2}$. On note $M = (m_{i,j})$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer la probabilité que M soit inversible.
- Montrer que si $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge, alors $u_n \to 0$. Donner un contre-exemple pour la réciproque.
- Énoncer et démontrer le critère de convergence par équivalence des SATP.
- En utilisant un comparaison série intégrale, montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge lorsque $\alpha > 1$.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
  - ▷ Formule pour la matrice d'une composée.
  - ▷ Conditions équivalentes pour l'inversibilité d'une matrice carrée.
  - ▷ Matrice d'une projection/symétrie dans une base adaptée.
  - ▷ Formule de changement de bases.
  - ▷ Lien rangs : Matrice/application linéaire, matrice/famille de vecteurs.
  - ▷ Propriétés de l'espérance : linéarité, inégalité triangulaire, positivité, croissance.
  - ▷ Espérances et variances des lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale).
  - ▷ Formule de transfert.
  - ▷ Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
  - ▷ Formule de Huygens.
  - ▷ Loi de la somme de deux variables aléatoires en fonction de la loi conjointe.
  - ▷ Lemme des coalitions.
  - ▷ Convergence et somme des séries géométriques.

- ▹ Convergence et somme des séries exponentielles.
- ▹ Convergence des séries de Riemann.
- ▹ Lien suite-série.
- ▹ Critère de convergence sur les sommes partielles des SATP.
- ▹ Comparaison de SATP.
- ▹ Équivalence de SATP.

A savoir faire

1. Savoir déterminer l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
2. Savoir déterminer le noyau et l'image d'une matrice.
3. Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases.
4. Savoir faire un changement de bases.
5. Savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à la main, ou bien reconnaître une loi usuelle.
6. Savoir calculer l'espérance
   - en revenant à la définition ;
   - en utilisant les lois usuelles ;
   - en utilisant la formule de transfert ;
   - en utilisant les propriétés de l'espérance.
7. Savoir calculer une variance, une covariance.
8. Savoir manipuler des variables aléatoires indépendantes.
9. Savoir étudier la nature d'une série :
   - en utilisant un équivalent ;
   - en utilisant une comparaison (inégalité, o, O) ;
   - en comparant à une série de Riemann.