

## Séries numériques - Exercices

**Exercice 1.** Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$	5. $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$	9. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} \cos(n)}{n^2}$
2. $\sum_{n \geq 1} (1 - e^{-\frac{1}{n^2}})$	6. $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$	10. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n) + \arctan(n)}{n+1}$
3. $\sum_{n \geq 2} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right)$	7. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$	11. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - \ln(n)}$	8. $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$	12. $\sum_{n \geq 0} n^{10} e^{-n^2}$

**Exercice 2.** Pour quelles valeurs de  $x$  les séries de termes généraux suivants convergent ?

1. $u_n = \frac{\sin(nx)}{n^2}$	2. $v_n = nx^n$ .
---------------------------------	-------------------

**Exercice 3.** 1. Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ . Montrer que les suites  $(S_{2p})$  et  $(S_{2p+1})$  sont adjacentes.

2. Pour quelles valeurs de  $x$  la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  converge-t-elle ?

**Exercice 4.** Justifier la convergence puis calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$	2. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1}$	3. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n 2^{3n-2}}{3^{2n+1}}$	4. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{n!}$
------------------------------------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------------------------	------------------------------------------

**Exercice 5.** 1. Justifier que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$  converge. On note  $S$  sa somme.

2. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout entier naturel  $n$  non nul on a :

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}.$$

3. En déduire la valeur de  $S$ .

4. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  converge et calculer sa somme.

**Exercice 6.** Pour quelles valeurs de  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$  la série  $\sum_{n \geq 2} (a\sqrt{n} + b\sqrt{n-1} + c\sqrt{n-2})$  converge-t-elle ? Donner la somme dans ces cas.

**Exercice 7.** 1. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{3^n}$  converge. On note  $S$  sa somme.

2. Soit  $N \geq 1$  et  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^N x^n$ . Pour  $x \neq 1$ , déterminer une expression sans  $\sum$  de  $f(x)$  puis de  $f'(x)$ .

3. En déduire la valeur de  $S$ .

**Exercice 8.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ .

1. Déterminer un équivalent de  $(u_{n+1} - u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel noté  $\gamma$ .

3. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge et déterminer un équivalent de ses sommes partielles.

**Exercice 9.** On pose  $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$  pour  $n \geq 1$ .

1. Déterminer la nature de la série de terme général  $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ .

2. En déduire qu'il existe  $C > 0$  tel que :  $n! \sim C\sqrt{n}n^n e^{-n}$ .

3. On a démontré dans le chapitre sur l'intégration que :  $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+2)}}$ .  
Déterminer la valeur de  $C$ .

**Exercice 10.** 1. Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs. On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

- Si  $|\ell| < 1$ , montrer que la série  $\sum u_n$  converge.
  - Si  $|\ell| > 1$ , montrer que la série  $\sum u_n$  diverge.
  - Donner un exemple de suite  $(u_n)$  telle que  $\ell = 1$  et la série  $\sum u_n$  diverge, puis un exemple avec  $\ell = 1$  et la série  $\sum u_n$  converge.
2. Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{n!}{n^n} a^n$  pour  $a > 0$ .

**Exercice 11 (Séries de Bertrand).** On considère la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels fixés.

- Pour quelles valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  la série diverge-t-elle grossièrement?
- Montrer que si  $\alpha > 1$ , alors la série converge quelle que soit la valeur de  $\beta$ .
- Montrer que si  $\alpha < 1$ , alors la série diverge quelle que soit la valeur de  $\beta$ .
- On suppose maintenant que  $\alpha = 1$ .
  - Si  $\beta \leq 0$ , montrer que la série diverge.
  - On suppose que  $\beta > 0$ .
    - Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$  est strictement décroissante sur  $[2, +\infty[$ .
    - En déduire la nature de la série.
- Quelle est la nature de  $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n})$ ?

**Exercice 12.** Soit  $\alpha > 1$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Justifier que la série  $\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^\alpha}$  converge.  
On note  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ .
- Soit  $a > 0$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}$ .
- En déduire un équivalent simple de  $R_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la série  $\sum R_n$  converge-t-elle?

**Exercice 13.** On pose  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ .

- Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
- Déterminer un équivalent de  $u_{n+1} - u_n$  à l'aide de  $u_n$
- Quelle est la nature de la série  $\sum u_n^2$ ?
- Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$ . On pourra poser  $v_n = \ln(u_n)$  en justifiant l'existence.

**Exercice 14.** Pour  $\alpha > 1$ , on pose  $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ .

- En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer la limite de  $(1-\alpha)\zeta(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $1^+$ .
- En déduire un équivalent de  $\zeta(\alpha)$  lorsque  $\alpha \rightarrow 1^+$ .

**Exercice 15.** On considère  $A$  l'ensemble des entiers naturels non nuls qui s'écrivent sans le chiffre 9. On note  $(u_n)$  la suite croissante des éléments de  $A$ .

- Soit  $m \geq 1$ . Déterminer le nombre de chiffres de  $m$  en fonction de  $m$ .
- Soit  $n \geq 0$ . On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$ . Justifier que  $S_n \leq \sum_{k=1}^{[\log_{10}(u_n)]+1} \frac{9^k}{10^{k-1}}$ .
- En déduire que la série  $\sum \frac{1}{u_n}$  converge.

## Indications - Solutions

### Exercice 1 :

- $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$ , les séries sont à termes positifs et la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge (Riemann), donc la série  $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$  diverge.
- $|1 - e^{1/n^2}| \sim \left| -\frac{1}{n^2} \right|$  qui est le terme général d'une série convergente (Riemann) à termes positifs. Par comparaison, la série  $\sum (1 - e^{1/n^2})$  converge absolument.
- $\left| \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right| = \left| \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{2n^2} - 1 - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) \right) \right| = \left| -\frac{1}{n^3} + o(1/n^3) \right| \sim \frac{1}{n^3}$  qui est le terme général d'une série convergente (Riemann). De plus, les deux séries sont à termes positifs, donc par comparaison, la série  $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$  converge absolument.
- Comme  $\left| \frac{1}{n^2 - \ln(n)} \right| \sim \frac{1}{n^2}$  qui est le terme général d'une série convergente et que les termes généraux sont positifs, par comparaison, la série  $\sum \frac{1}{n^2 - \ln(n)}$  converge absolument.
- $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$  : les deux suites sont positives, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série ne converge pas.
- $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$  les deux suites sont positives, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série converge.
- $\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 1 \neq 0$ , donc la série diverge grossièrement.
- Si  $|a| > 1$ ,  $\left| \frac{a^n}{1+a^{2n}} \right| \sim \left| \frac{a^n}{a^{2n}} \right| = \frac{1}{|a|^n}$  qui est le terme général d'une série convergente, donc la série converge absolument.  
Si  $|a| = 1$ ,  $\left| \frac{a^n}{1+a^{2n}} \right| = \frac{1}{2}$  donc la série diverge grossièrement.  
Si  $|a| < 1$ ,  $\left| \frac{a^n}{1+a^{2n}} \right| \sim |a|^n$  qui est le terme général d'une série géométrique convergente, donc la série converge absolument.
- $\left| \frac{\sqrt{n+1} \cos(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$  qui est le terme général d'une série convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série converge absolument.
- $\frac{\ln(n) + \arctan(n)}{n+1} \sim \frac{\ln(n)}{n}$ . Les séries sont à termes positifs donc ont la même nature. De plus,  $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$  qui est le terme général d'une série divergente. Donc la série diverge.
- $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{1+1/n} - 1) \sim \frac{1}{2n^{3/2}}$  qui est le terme général d'une série convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série converge.
- $n^{12} e^{-n^2} \rightarrow 0$ , donc  $n^{10} e^{-n^2} = o(1/n^2)$ . La série étant à termes positifs, la série  $\sum n^{10} e^{-n^2}$  converge par comparaison.

### Exercice 2 :

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ , donc par comparaison de séries à termes positifs, la série converge absolument.
- Si  $|x| \geq 1$ , la suite  $nx^n$  ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.  
Si  $|x| < 1$ , on peut par exemple comparer à  $\frac{1}{n^2}$  :  $|n^3 x^n| \rightarrow 0$  par croissances comparées, donc  $|nx^n| = o(1/n^2)$  et par comparaison à une série de Riemann convergente, la série converge absolument.

### Exercice 3 :

- Déjà,  $S_{2p+1} - S_{2p} = -\frac{1}{\sqrt{2p+1}} \rightarrow 0$ . Puis,  $S_{2p+3} - S_{2p+1} = -\frac{1}{\sqrt{2p+3}} + \frac{1}{\sqrt{2p+1}} > 0$  et  $S_{2p+2} - S_{2p} = \frac{1}{\sqrt{2p+2}} - \frac{1}{\sqrt{2p+1}} < 0$ .
- Si  $|x| > 1$ , alors  $\frac{x^n}{\sqrt{n}}$  ne tend pas vers 0 par croissances comparées. Donc la série diverge grossièrement.  
Si  $x = 1$ , la série de terme général  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  diverge (Riemann).  
Si  $|x| < 1$ , on prend  $y$  tel que  $|x| < y < 1$  et alors  $\frac{|x|^n}{\sqrt{n}} = o(y^n)$  car  $\frac{|x|}{y} < 1$  et la série  $\sum y^n$  est géométrique convergente.  
Si  $x = -1$ , la série ne converge pas absolument car  $\left| \frac{x^n}{\sqrt{n}} \right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Par contre, d'après la question précédente, elle converge.

### Exercice 4 :

- Pour tout  $n \geq 1$ ,  $0 \leq \frac{1}{n!} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \leq \frac{1}{n!}$  qui est le terme général d'une série exponentielle donc convergente.  
Soit  $N \geq 1$ ,  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(N+1)!} \rightarrow 1$  par télescopage.

2. On a  $\frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2}$  donc par comparaison des séries à termes positifs, la série converge. Puis,  $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ , donc pour  $N \geq 2$ ,  $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \rightarrow \frac{3}{2}$ .
3.  $\frac{(-1)^n 2^{3n-2}}{3^{2n+1}} = \frac{1}{12} \left(-\frac{8}{9}\right)^n$ , et comme  $\left|-\frac{8}{9}\right| < 1$ , la série est géométrique convergente. De plus, la somme vaut  $\frac{1}{12} \frac{1}{1 + \frac{8}{9}} = \frac{3}{68}$ .
4. Comme  $\frac{x^{2n+1}}{n!} = x \frac{(x^2)^n}{n!}$  c'est une série exponentielle. Or, la série  $\sum \frac{u^n}{n!}$  converge pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , donc la série  $\sum \frac{x^{2n+1}}{n!}$  converge aussi.  
De plus,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x e^{x^2}$ .

**Exercice 5 :**

1. C'est une série à termes positifs et  $\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \sim \frac{3}{n^4}$  qui est une série de Riemann convergente. Par comparaison, la série converge.
2. On trouve  $\frac{3}{n(n+3)} = \frac{n+3-n}{n(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$ .
3. Pour  $N \geq 1$ ,

$$\sum_{n=1}^N \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}$$

par télescopage. Donc  $S = \frac{1}{6}$ .

4. La série est à termes positifs et  $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$  qui est une série de Riemann convergente.  
Puis on décompose en éléments simples :  $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$ . Pour  $N \geq 1$ ,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+2)}$$

Donc la somme vaut  $\frac{1}{4}$ .

**Exercice 6 :** On fait un développement limité de  $u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n-1} + c\sqrt{n-2}$  :

$$u_n = \sqrt{n}(a + b(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2}) + c(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}) + o(1/n^2)) = \sqrt{n}(a + b + c + (-b/2 - c)\frac{1}{n} + (b/8 + c/2)\frac{1}{n^2} + o(1/n^2)).$$

Donc si  $a + b + c \neq 0$ ,  $u_n \sim (a + b + c)\sqrt{n}$  qui ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

Si  $a + b + c = 0$ , et  $-b/2 - c \neq 0$ , alors  $u_n \sim (-b/2 - c)\frac{1}{n}$  et par comparaison, la série diverge.

Enfin, si  $a + b + c = 0$  et  $-b/2 - c = 0$  alors  $u_n = O(1/n^2)$  donc la série converge.

Dans ce cas, on trouve  $c = -b/2$ , et  $a = -b/2$ , donc  $u_n = a(\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2})$ . Pour  $N \geq 2$ ,

$$\sum_{n=1}^N u_n = a \left( \sum_{n=2}^N \sqrt{n} - 2 \sum_{n=1}^{N-1} \sqrt{n} + \sum_{n=0}^{N-2} \sqrt{n} \right) = a(-2 + \sqrt{0} + 1 + \sqrt{N} + \sqrt{N-1} - 2\sqrt{N-1})$$

Or  $\sqrt{N} - \sqrt{N-1} \sim \sqrt{N} \frac{1}{2N} \rightarrow 0$ , donc la somme vaut  $-a$ .

**Exercice 7 :**

1. On peut par exemple remarquer que  $n^2 \frac{n}{3^n} \rightarrow 0$  par croissances comparées, donc  $\frac{n}{3^n} = o(1/n^2)$ . Par comparaison, la série converge.
2. Si  $x \neq 1$ , alors  $f(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ . Donc  $f'(x) = \frac{-(N+1)x^N(1-x) + (1-x^{N+1})}{(1-x)^2} = \frac{Nx^{N+1} - (N+1)x^N + 1}{(1-x)^2}$ .
3. On a aussi  $f'(x) = \sum_{n=1}^N nx^n$ . En particulier, pour  $x = \frac{1}{3}$ ,  $\sum_{n=1}^N \frac{n}{3^n} = \frac{N \frac{1}{3^{N+1}} - (N+1) \frac{1}{3^N} + 1}{\frac{4}{9}} \rightarrow \frac{9}{4} = S$ .

**Exercice 8 :**

1.  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + 1/n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) \sim -\frac{1}{2n^2}$ .
2. Par comparaison de séries à termes de signes constants,  $\sum u_{n+1} - u_n$  converge absolument. Donc la suite  $(u_n)$  converge.
3. On obtient  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma + o(1)$ , donc  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ .

**Exercice 9 :**

1. On calcule :  $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1} e^{-n-1} \sqrt{n+1} n!}{(n+1)! n^n e^{-n} \sqrt{n}}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1/2} e^{-1}}{n^{n+1/2}}\right) = (n+1/2)\ln(1+1/n) - 1 = (n+1/2)(1/n - 1/2n^2 + \frac{1}{3n^2} + o(1/n^3)) - 1 = \frac{1}{12n^2} + o(1/n^2)$ , donc la série converge par comparaison à une série de Riemann.

2. Ainsi, la suite  $v_n = \ln(u_n)$  converge : il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $v_n \rightarrow A$ . Par continuité de l'exponentielle,  $u_n \rightarrow e^A$ , en posant  $C = e^{-A} > 0$ , on trouve l'équivalent voulu.

3. On remplace :

$$\sqrt{\frac{\pi}{4(n+1)}} \sim \frac{2^{2n} C^2 n^{2n+1} e^{-2n}}{C \sqrt{2n+1} (2n+1)^{2n+1} e^{-2n-1}},$$

donc  $C \sim \sqrt{\pi} e^{-1} \frac{(2n+1)^{2n+1} \sqrt{2n+1}}{2^{2n+1} \sqrt{n+1} n^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{2n+1}}{e \sqrt{n+1}} (1+1/2n)^{2n+1}$ . Or  $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+1}} \rightarrow \sqrt{2}$  et  $(1+1/2n)^{2n+1} = e^{(2n+1)\ln(1+1/2n)} = e^{(2n+1)/(2n)+o(1)} \rightarrow e$ . D'où  $C = \sqrt{2\pi}$ .

**Exercice 10 :**

1. (a) Supposons  $|\ell| < 1$ . Alors il existe  $|\ell| < k < 1$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ , d'où  $u_{n+1} \leq k u_n$ . Par récurrence, il existe  $M \geq 0$  tel que  $u_n \leq M k^{n-N}$  pour tout  $n \geq N$ . Par comparaison à une série géométrique, la série  $\sum u_n$  converge.

(b) Si  $|\ell| > 1$ , alors à partir d'un certain rang,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ , donc la suite est croissante, elle ne peut pas converger vers 0. La série diverge grossièrement.

(c) On prend  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  de sorte que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$ . Si  $\alpha \leq 1$ , la série diverge, sinon elle converge.

2. On pose  $u_n = \frac{n!}{n^n} a^n$  qui est une suite à terme strictement positifs. On a alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a(1+1/n)^{-n} \rightarrow \frac{a}{e}$ . Donc la série converge si  $a < e$  et diverge si  $a > e$ . Pour  $a = e$ , on ne sait pas. On peut utiliser l'équivalent de Stirling (exercice 9) :  $\frac{n!}{n^n} e^n \sim \sqrt{2\pi n}$  donc la série ne converge pas.

**Exercice 11 :**

1. Si  $\alpha < 0$ , alors la série diverge grossièrement par croissances comparées. Si  $\alpha = 0$  et  $\beta < 0$  aussi. Si  $\alpha < 0$ , on a  $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \rightarrow 0$  quel que soit  $\beta$  par croissances comparées.

2. Prenons  $\alpha > 1$ . On prend  $\gamma$  tel que  $1 < \gamma < \alpha$ . Alors  $n^\gamma \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} \ln(n)^\beta} \rightarrow 0$  quel que soit  $\beta$  par croissances comparées. Donc  $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = o(1/n^\gamma)$ . Par comparaison avec une série de Riemann, la série converge donc quelle que soit la valeur de  $\beta$ .

3. Prenons  $\alpha < 1$ . On procède de même en prenant  $\gamma$  tel que  $\alpha < \gamma < 1$ . Cette fois on a  $\frac{1}{n^\gamma} = o(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta})$ . Comme la série  $\sum \frac{1}{n^\gamma}$  ne converge pas, la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$  ne converge pas non plus.

4. (a) Si  $\beta \leq 0$ , alors  $\frac{1}{n \ln(n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$  qui est le terme général d'une série qui diverge.

(b) i. Les fonctions  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto \ln(x)^\beta$  sont strictement croissantes et positives sur  $]2, +\infty[$ , donc  $f$  est strictement décroissante.

ii. On fait une comparaison série-intégrale, pour  $n \geq 3$  :

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq \frac{1}{n(\ln(n))^\beta} \leq \int_{n-1}^n f(t) dt \text{ donc } \int_3^{N+1} f(t) dt \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(\ln(n))^\beta} \leq \frac{1}{2(\ln(2))^\beta} \int_2^N f(t) dt$$

$$\text{Or, si } \beta \neq 1, \int_2^N f(t) dt = \frac{1}{1-\beta} [\ln(t)^{-\beta+1}]_2^N \text{ qui converge si } 1-\beta < 0 \iff \beta > 1 \text{ et } \int_3^{N+1} f(t) dt = \frac{1}{1-\beta} [\ln(t)^{-\beta+1}]_3^{N+1}$$

$$\text{qui diverge si } \beta < 1. \text{ Puis, si } \beta = 1, \int_3^{N+1} f(t) dt = [\ln(\ln(t))]_3^{N+1} \text{ qui diverge.}$$

Donc la série converge ssi  $\beta > 1$ .

$$(c) \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)} = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{\ln(n+1)} + \sqrt{\ln(n)}} = \frac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{\ln(n)} + \sqrt{\ln(n+1)}} \sim \frac{1}{2n \ln(n)^{3/2}}. \text{ La série diverge!}$$

Bon, on peut aussi remarquer que c'est une série télescopique...

**Exercice 12 :**

1. C'est le reste d'une série de Riemann convergente!

$$2. \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} [t^{1-\alpha}]_a^x \rightarrow \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \text{ car } 1-\alpha < 0.$$

3. La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc pour tout  $k \geq n+2$  :  $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$ . Donc  $\int_{n+2}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n+1}^N \frac{dt}{t^\alpha}$ .

D'après la question précédente, pour tout  $n \geq 0$ ,  $\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{(n+2)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq R_n \leq \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ . Or les deux côtés sont équivalents à  $\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$  qui est donc l'équivalent cherché pour  $R_n$ .

4. La série  $\sum R_n$  converge ssi  $1-\alpha < -1$ , c'est-à-dire, ssi  $\alpha > 2$ .

**Exercice 13 :**

- On montre par récurrence que  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Puis, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \leq u_n$ , donc  $(u_n)$  est décroissante. D'après le TCM, elle converge vers  $\ell \geq 0$ . Par continuité de  $t \mapsto t e^{-t}$ ,  $\ell = \ell e^{-\ell}$ , donc soit  $\ell = 0$ , soit  $1 = e^{-\ell}$  ce qui donne aussi  $\ell = 0$ . Donc  $u_n \rightarrow 0$ .
- $u_{n+1} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1) \sim -u_n^2$  car  $u_n \rightarrow 0$ .
- La série  $\sum u_{n+1} - u_n$  converge et à termes négatifs. Donc par comparaison,  $\sum -u_n^2$  converge aussi, donc  $\sum u_n^2$  converge.
- Pour tout  $n$ ,  $u_n > 0$ , donc  $v_n = \ln(u_n)$  est bien définie. Puis,  $v_{n+1} = v_n - u_n$ , d'où  $v_{n+1} - v_n = -u_n$ . Comme la série  $\sum v_{n+1} - v_n$  converge,  $\sum u_n$  converge aussi.

**Exercice 14 :**

1. Soit  $\alpha > 1$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est continue et décroissante sur  $]0, +\infty[$ . Donc pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^\alpha}$$

En sommant, on trouve pour  $N \geq 2$  et en multipliant par  $\alpha - 1$  :

$$(\alpha - 1) \int_2^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq (\alpha - 1) \sum_{n=2}^N \frac{dt}{t^\alpha} \leq (\alpha - 1) \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha}$$

Or  $(\alpha - 1) \int_2^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} = -[t^{1-\alpha}]_2^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{\alpha-1}}$  et  $(\alpha - 1) \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$ . Donc pour tout  $\alpha > 1$ ,

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} \leq (\alpha - 1)\zeta(\alpha) \leq 1$$

D'où  $(\alpha - 1)\zeta(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^+} 1$  par encadrement.

2. Ainsi,  $\zeta(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha - 1}$ .

**Exercice 15 :**

- Soit  $N$  le nombre de chiffre de  $m$  :  $10^{N-1} \leq m < 10^N$ , donc  $(N-1) \leq \log_{10}(m) < N$ . Ainsi,  $N-1 = \lfloor \log_{10}(m) \rfloor$  et  $N = \lfloor \log_{10}(m) \rfloor + 1$ .
- On note  $N = \lfloor \log_{10}(u_n) \rfloor + 1$  qui est le nombre de chiffres dans  $u_n$ . Alors pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , il y a moins de  $9^k$  nombres à  $k$  chiffres sans 9 et chacun de ces nombres sont supérieur ou égal à  $10^{k-1}$ . En regroupant les  $u_k$  par nombre de chiffres, on obtient donc :  $S_n \leq \sum_{k=1}^N \frac{9^k}{10^{k-1}}$ .
- La série est à termes positifs, et comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=1}^{\lfloor \log_{10}(u_n) \rfloor + 1} \frac{9^k}{10^{k-1}} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9^k}{10^{k-1}} = \frac{10}{9}$  (somme géométrique), la série converge.