

Chapitre 29 : Espaces préhilbertiens réels

I. Produit scalaire

I.1. Définition

Définition I.1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Un **produit scalaire** sur E est une application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \langle x, y \rangle \end{cases}$$

vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. **bilinéarité** : $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ et $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle$
2. **symétrie** : $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. **positivité** : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$
4. **séparation / définie positivité** : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

On dit alors que le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace préhilbertien réel**. Lorsque E est de dimension finie, on l'appelle plutôt un **espace euclidien**.

Remarque I.1. On peut aussi voir la notation $(x|y)$ ou bien $x \cdot y$ pour le produit scalaire.

I.2. Exemples

Proposition I.1. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ associe :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , appelé le **produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n** .

Remarque I.2. En identifiant \mathbb{R}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique s'écrit :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y \rangle = X^T Y.$$

Proposition I.2. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

est un produit scalaire.

Proposition I.3. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$$

est un produit scalaire.

I.3. Norme associée à un produit scalaire

Dans toute la suite, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Définition I.2. L'application

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{cases}$$

II. Orthogonalité

est appelée **norme associée au produit scalaire**.

Un vecteur $x \in E$ est dit **unitaire** si $\|x\| = 1$.

La **distance** entre deux vecteurs $x, y \in E$ est le réel $d(x, y) = \|x - y\|$.

Proposition I.4. 1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0_E$ (c'est la **séparation de la norme**).

2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (c'est l'**homogénéité de la norme**).

3. **Identités remarquables** : $\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ et $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$.

4. **Formule de polarisation** : $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$.

5. **Identité du parallélogramme** : $\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Proposition I.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

$$\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Proposition I.6 (Inégalité triangulaire).

$$\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont positivement liés, i.e. ssi $y = 0_E$ ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tels que $x = \lambda y$.

Corollaire I.7.

$$\forall x, y \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

II. Orthogonalité

II.1. Vecteurs orthogonaux

Définition II.1. • Soit $x, y \in E$. On dit que x et y sont **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$.

- On dit qu'une famille (x_1, \dots, x_n) de vecteurs de E est **orthogonale** si les vecteurs sont orthogonaux deux à deux : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$.
- On dit qu'une famille de vecteurs de E est **orthonormale** ou (**orthonormée**) si elle est orthogonale et tous les vecteurs sont unitaires.

Théorème II.1 (Pythagore)

- Soit $x, y \in E$ deux vecteurs. Alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ssi x et y sont orthogonaux.
- Si (x_1, \dots, x_n) est une famille orthogonale, alors $\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$.

Proposition II.2. Soit (x_1, \dots, x_n) une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Alors la famille $\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|} \right)$ est orthonormale.

Remarque II.1. Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs. L'hypothèse de non nullité est donc importante!

Proposition II.3. Une famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.

II.2. Orthogonal d'une partie

Définition II.2. Soit $A \subset E$ une partie non vide. L'orthogonal de A est l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}.$$

C'est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A .

Proposition II.4. Soient A et B deux parties non vides.

1. A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .
2. Si $A = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors

$$x \in A^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x, e_i \rangle = 0.$$

3. $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

Proposition II.5. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F et F^\perp sont en somme directe.

III. Espaces euclidiens

On suppose dans ce paragraphe que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

III.1. Bases orthonormées

Définition III.1. On dit qu'une base de E est orthogonale (resp. orthonormale) si c'est une famille orthogonale (resp. orthonormale).

Proposition III.1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Soit $x, y \in E$.

1. $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$
2. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle = \langle x, e_1 \rangle \langle y, e_1 \rangle + \dots + \langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle$
3. $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2} = \sqrt{\langle x, e_1 \rangle^2 + \dots + \langle x, e_n \rangle^2}$
4. Si $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$, alors $\langle x, y \rangle = X^\top Y$ et $\|x\| = \sqrt{X^\top X}$.

Lemme III.1. Soit (u_1, \dots, u_k) une famille orthogonale de vecteurs de E et $x \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.

Le vecteur $x - \sum_{i=1}^k \langle x, u_i \rangle \frac{u_i}{\|u_i\|^2}$ est orthogonal à $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.

Théorème III.2

Soit E un espace euclidien. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale. En particulier, E admet une base orthonormale.

IV. Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

E n'est plus forcément de dimension finie.

IV.1. Projection orthogonale et supplémentaire orthogonale

Proposition IV.1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et soit (e_1, \dots, e_n) une base orthogonale de F . Pour tout $x \in E$, on pose

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \frac{e_i}{\|e_i\|^2}.$$

L'application p_F est une projection de E , $\text{Im}(p_F) = F$ et $\text{ker}(p_F) = F^\perp$.
En particulier, F et F^\perp sont supplémentaires dans E .

Définition IV.1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On appelle **projection orthogonale sur F** , notée p_F , la projection sur F parallèlement à F^\perp .

Le sous-espace F^\perp est appelé le **supplémentaire orthogonale de F** .

Proposition IV.2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

$$\forall x, y \in E, \quad y = p_F(x) \iff (y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp)$$

Corollaire IV.3. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E ,

1. $\forall x \in E, x - p_F(x) \in F^\perp$
2. $\forall x \in E, \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$

Proposition IV.4. Supposons que E est euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E .

1. $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$
2. $(F^\perp)^\perp = F$.

Remarque IV.1. Si F est un hyperplan de E , alors F^\perp est une droite. Donc il existe $u \in E$ tel que $F^\perp = \text{Vect}(u)$. On dit que u est un **vecteur normal** à F , et on a alors $F = \{x \in E \mid \langle x, u \rangle = 0\}$.

Proposition IV.5. Supposons que E est euclidien et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E de bases (f_1, \dots, f_n) et (g_1, \dots, g_p) . Alors $G = F^\perp$ si et seulement si :

- $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
- $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \langle f_i, g_j \rangle = 0$.

IV.2. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition IV.6 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt). Soit (u_1, \dots, u_n) une famille libre de E . Il existe une famille orthonormale (e_1, \dots, e_n) telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$$

Méthode. L'application du procédé de Gram-Schmidt est algorithmique : on note pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, F_k = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et

- on pose $f_1 = u_1$
- si f_1, \dots, f_k sont construits, on prend $f_{k+1} = u_{k+1} - p_{F_k}(u_{k+1}) = u_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle u_{k+1}, f_i \rangle \frac{f_i}{\|f_i\|^2}$.

À la fin, on pose pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}$.

IV.3. Distance à un sous-espace

Théorème IV.7

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et soit $x \in E$.

L'ensemble $\{\|x - f\|, f \in F\}$ est non vide et minoré.

On pose $d(x, F) = \inf_{f \in F} (\|x - f\|)$: c'est la **distance de x à F** .

De plus, $\|x - p_F(x)\| = d(x, F)$ et

$$\forall f \in F, \|x - f\| = d(x, F) \Rightarrow f = p_F(x).$$

Corollaire IV.8. Si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E , $d(x, F) = \|p_{F^\perp}(x)\|$.