Chapitre 29 : Espaces préhilbertiens réels

I. Produit scalaire

I.1. Définition

Définition I.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un **produit scalaire** sur E est une application :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \left\{ \begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle \end{array} \right.$$

vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. **bilinéarité** :

2. **symétrie** : ....
3. **positivité** : ....
4. **séparation / définie positivité** : ....

On dit alors que le couple $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un **espace préhilbertien réel**. Lorsque E est de dimension finie, on l'appelle plutôt un **espace euclidien**.

Remarque I.1. On peut aussi voir la notation $(x|y)$ ou bien $x\cdot y$ pour le produit scalaire.

Proposition I.1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\langle .,.\rangle : E^2 \to \mathbb{R}$. Si $\langle .,.\rangle$ est symétrique et linéaire à gauche alors elle est bilinéaire.*

I.2. Exemples

Proposition I.2. *L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui à $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ associe :*

$$\langle x,y\rangle = \text{......................}$$

*est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé le **produit scalaire canonique de** $\mathbb{R}^n$.*

Remarque I.2. En identifiant $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique s'écrit :

$$\forall X,Y\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad \langle X,Y\rangle = \text{................}$$

Proposition I.3. *L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})\times\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall f,g\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\quad \langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

est un produit scalaire.

Proposition I.4. *L'application* $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$$

est un produit scalaire.

I.3. Norme associée à un produit scalaire

Dans toute la suite, $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ **un espace préhilbertien réel.**

Définition I.2. L'application

$$\|\cdot\| : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x,x\rangle}\end{array}\right.$$

est appelée **norme associée au produit scalaire**.
Un vecteur $x\in E$ est dit **unitaire** si $\|x\|=1$.
La **distance** entre deux vecteurs $x,y\in E$ est le réel $\mathrm{d}(x,y)=\|x-y\|$.

Exemple I.1. Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\|x\| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Proposition I.5.
1. $\forall x\in E,\ \|x\|=0 \iff x=0_E$ *(c'est la **séparation** de la norme).*
2. $\forall x\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ *(c'est l'**homogénéité** de la norme).*
3. ***Identités remarquables** :*
4. ***Formule de polarisation** :* $\forall x,y\in E,\ \langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2)$.
5. ***Identité du parallélogramme** :* $\forall x,y\in E,\ \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$.

Exemple I.2. Soient $x,y\in E$ de même norme. Montrer que $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux.

Proposition I.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

$$\forall x,y\in E,\quad |\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\,\|y\|.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Exemples I.3.
1. Pour $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

2. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

3. Pour $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire précédent :

4. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$.

Proposition I.7 (Inégalité triangulaire).

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont positivement liés, i.e. ssi $y = 0_E$ ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tels que $x = \lambda y$.

Corollaire I.8.

$$\forall x, y \in E, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|.$$

II. Orthogonalité

II.1. Vecteurs orthogonaux

Définition II.1.

- Soit $x, y \in E$. On dit que x et y sont **orthogonaux** si ....
- On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est **orthogonale** si les vecteurs sont orthogonaux deux à deux :
- On dit qu'une famille de vecteurs de E est **orthonormale** ou (**orthonormée**) si elle est orthogonale et tous les vecteurs sont unitaires.

Exemple II.1. On considère $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire précédent. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k : t \mapsto \sin(2k\pi t)$ et $g_k : t \mapsto \cos(2k\pi t)$. Montrer que la famille $(f_k, g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

.

Théorème II.1 (...............................)

- *Soit $x, y \in E$ deux vecteurs. Alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ssi x et y sont orthogonaux.*
- *Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale, alors $\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.*

Proposition II.2. *Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Alors la famille $\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$ est orthonormale.*

Remarque II.1. Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs. L'hypothèse de non nullité est donc importante !

Proposition II.3. *Une famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.*

II.2. Orthogonal d'une partie

Définition II.2. Soit $A \subset E$ une partie non vide. L'**orthogonal** de A est l'ensemble :

....

C'est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.

Exemple II.2. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, $A = \{(1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Déterminer $A^\perp$ et $B^\perp$.

Proposition II.4. *Soient A et B deux parties non vides.*

1. *$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Si $A = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors*

$$x \in A^\perp \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \langle x, e_i \rangle = 0.$$

3. *$E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.*

Exemple II.3. Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 0 \text{ et } x + 2y - z = 0\}$. Déterminer $A^\perp$.

Proposition II.5. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F et $F^\perp$ sont en somme directe.*

Exemple II.4. Soit $E = \mathscr{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, $F = \{f \in E \mid f \text{ est paire}\}$ et $G = \{g \in E \mid g \text{ est impaire}\}$. Montrer que $F^\perp = G$.

III. Espaces euclidiens

On suppose dans ce paragraphe que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

III.1. Bases orthonormées

Définition III.1. On dit qu'une base de E est orthogonale (resp. orthonormale) si c'est une famille orthogonale (resp. orthonormale).

Proposition III.1. *Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit $x, y \in E$.*

1. $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$
2. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle = \langle x, e_1 \rangle \langle y, e_1 \rangle + \cdots + \langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle$
3. $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2} = \sqrt{\langle x, e_1 \rangle^2 + \cdots + \langle x, e_n \rangle^2}$
4. *Si* $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ *et* $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$, *alors* $\langle x, y \rangle = X^\top Y$ *et* $\|x\| = \sqrt{X^\top X}$.

Exemple III.1. Soit $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,-1,0)$ et $e_3 = (1,1,-2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

2. Est-elle orthonormée ?

3. On pose $e'_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$, $e'_2 = \dfrac{e_2}{\|e_2\|}$, $e'_3 = \dfrac{e_3}{\|e_3\|}$. Justifier que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer les coordonnées de $v = (1,2,3)$ dans $\mathscr{B}'$.

Lemme III.1. *Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille orthogonale de vecteurs de E et $x \notin \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. Le vecteur $x - \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i \rangle \dfrac{u_i}{\|u_i\|^2}$ est orthogonal à $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$.*

Théorème III.2

Soit E un espace euclidien. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.
En particulier, E admet une base orthonormale.

IV. Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

E n'est plus forcément de dimension finie.

IV.1. Projection orthogonale et supplémentaire orthogonal

Proposition IV.1. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthogonale de F. Pour tout $x\in E$, on pose*

$$p_F(x)=\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle\frac{e_i}{\|e_i\|^2}.$$

L'application p_F est une projection de E, $\mathrm{Im}(p_F)=F$ et $\ker(p_F)=F^{\perp}$.
En particulier, F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E.

Définition IV.1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle **projection orthogonale sur** F, notée p_F, la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
Le sous-espace $F^{\perp}$ est appelé le **supplémentaire orthogonal de** F.

Proposition IV.2. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.*

$$\forall x,y\in E,\quad y=p_F(x)\iff\left(y\in F\text{ et }x-y\in F^{\perp}\right)$$

Corollaire IV.3. *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E,*

1. $\forall x\in E,\ x-p_F(x)\in F^{\perp}$
2. $p_F+p_{F^{\perp}}=\mathrm{id}_E$
3. $\forall x\in E,\ \|x\|^2=\left\|p_F(x)\right\|^2+\left\|x-p_F(x)\right\|^2$

Exemple IV.1. Soit $F=\mathrm{Vect}((1,1,1))$. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Déterminer l'expression de $p_F(u)$ puis de $p_{F^{\perp}}(u)$.

Remarque IV.1. Si on ne dispose pas d'une base orthonormée de F, mais simplement d'une famille génératrice $(e_1,\dots,e_p)$ pour déterminer $y=p_F(x)$, on peut chercher les coefficients $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{R}$ tels que $y=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_pe_p$ et remarquer qu'on a le système : $\forall k\in[\![1,p]\!]$, $\langle x-y,e_k\rangle=0$ et résoudre.

Exemple IV.2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \text{Vect}(1, X)$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.

1. Montrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur F.

Proposition IV.4. *Supposons que E est euclidien et soit F un sous-espace vectoriel de E.*

1. $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$

2. $(F^\perp)^\perp = F$.

Proposition IV.5. *Supposons que E est euclidien et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E de bases $(f_1, \ldots, f_n)$ et $(g_1, \ldots, g_p)$. Alors $G = F^\perp$ si et seulement si :*

- $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
- $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \langle f_i, g_j\rangle = 0$.

Remarque IV.2. Si F est un hyperplan de E, alors $F^\perp$ est une droite. Donc il existe $u \in E$ tel que $F^\perp = \text{Vect}(u)$. On dit que u est un **vecteur normal** à F, et on a alors $F = \{x \in E \mid \langle x, u\rangle = 0\}$.

Exemple IV.3. Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Déterminer le supplémentaire orthogonal de A dans $\mathbb{R}^3$.

IV.2. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

> **Proposition IV.6 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt).** *Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de E. Il existe une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ telle que :*
>
> $$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$$

Méthode. L'application du procédé de Gram-Schmidt est algorithmique : on note pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $F_k = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et

- on pose $f_1 = u_1$
- si $f_1, \dots, f_k$ sont construits, on prend $f_{k+1} = u_{k+1} - p_{F_k}(u_{k+1}) = u_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle u_{k+1}, f_i \rangle \frac{f_i}{\|f_i\|^2}$.

À la fin, on pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $e_k = \dfrac{f_k}{\|f_k\|^2}$.

Exemples IV.4.

1. Orthonormaliser la famille $(u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,0,-1), u_3 = (-1,2,3))$.

2. Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \sin(\pi x)$ et $f_3 : x \mapsto \sin(2\pi x)$. On pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$. Déterminer une base orthonormée de F.

IV.3. Distance à un sous-espace

Théorème IV.7

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et soit $x \in E$.
L'ensemble $\{\|x-f\|, f \in F\}$ est non vide et minoré.
*On pose $d(x,F) = \inf_{f\in F}(\|x-f\|)$: c'est la **distance de** x **à** F.*
De plus, $\|x - p_F(x)\| = d(x,F)$ et

$$\forall f \in F, \|x-f\| = d(x,F) \Rightarrow f = p_F(x).$$

Corollaire IV.8. *Si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E, $d(x,F) = \|p_{F^\perp}(x)\|$.*

Exemple IV.5. Soit $v = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z = 0\}$. Déterminer $d(v,F)$.