

Espaces préhilbertiens réels - Exercices

Exercice 1. Montrer que les applications suivantes définissent des produits scalaires :

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) \end{cases}$
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0) \end{cases}$
3. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2)dt \end{cases}$
4. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt \end{cases}$
5. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_0^1 (fg + f'g') \end{cases}$
6. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto X^T Y \end{cases}$
7. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (M, N) & \mapsto \text{tr}(M^T N) \end{cases}$
8. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto 2xx' + xy' + x'y + 2yy' \end{cases}$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a_0, \dots, a_n des réels tous distincts. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note L_i le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P|Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$.

1. Montrer que $(\cdot | \cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(L_i | P) = P(a_i)$.
3. Montrer que la famille (L_0, \dots, L_n) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i$.
5. Soit $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{i=0}^n P(a_i) = 0 \right\}$. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $d(Q, H)$.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Soit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_0^1 f'(t)g'(t)dt + f(0)g(0). \end{cases}$$

Montrer que c'est un produit scalaire sur E .

Exercice 4. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$.
Pour quels (x_1, \dots, x_n) a-t-on égalité?

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

Exercice 6. Nature de la série de terme général : $u_n = \frac{1}{n^2(\sqrt{2})^n} \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}}$.

Exercice 7. Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Montrer que $\int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq (b-a)^2$.
Étudier le cas d'égalité.

Exercice 8. On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in E$, on définit $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n)Q(n)$.

1. Justifier que $(P|Q)$ est bien défini.
2. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Exercice 9. On prend $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ converge}\}$. Pour $u, v \in E$, on pose $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

1. Montrer que $(u|v)$ existe.
2. Montrer que E est un ev.
3. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Exercice 10. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est périodique de période } 2\pi\}$.

1. Vérifier que E est un sev de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt \end{cases}$ est un produit scalaire sur E .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{F} = (x \mapsto \cos(kx))_{0 \leq k \leq n}$ est orthogonale.
4. E est-il de dimension finie?

Exercice 11. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \rightarrow \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt \end{cases}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la projection orthogonale de X^4 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $A^T A X = 0_n \iff A X = 0_n$.
2. En déduire que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T A)$.
3. Montrer alors que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$.

Exercice 13. Soit E un espace euclidien. Si $v \in E$, on note $\varphi_v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ la forme linéaire définie par $\varphi_v(x) = \langle v, x \rangle$.

1. Montrer que l'application $\Phi : v \in E \mapsto \varphi_v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est un isomorphisme.
2. Soit $H \subset E$. Montrer que H est un hyperplan de E ssi c'est l'orthogonal d'un vecteur non nul.
3. On prend $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul. On pose $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$.

Justifier que H est un hyperplan de \mathbb{R}^n et donner un vecteur normal à H . Déterminer ensuite la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H .

Exercice 14. On considère \mathbb{R}^4 muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 défini par $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$.

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F .
2. Écrire la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 de la projection orthogonale sur F .
3. On prend $u = (1, 2, 3, 4)$. Calculer $d(u, F)$.

Exercice 15. \mathbb{R}^4 est muni de son produit scalaire usuel. On pose $u = (1, 1, 1, 0)$ et $v = (1, 1, 0, 1)$ et $F = \text{Vect}(u, v)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .

Exercice 16. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 dx$.

Exercice 17. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $A, B \in E$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que pour tout $A \in E$, $\text{tr}(A) \leq \sqrt{n \text{tr}(A^T A)}$. Quand a-t-on égalité?
3. Soit $H = \{M \in E \mid \text{tr}(M) = 0\}$. Justifier que H est un sev de E et déterminer H^\perp .
4. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
6. Soit $A \in E$. Montrer que $\inf_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leq i, j \leq n} ([A]_{ij} - [S]_{ij})^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq n} ([A]_{ij} - [A]_{ji})^2$.