Déterminants - Exercices

Exercice 1. 1. Soit n un entier impair et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $\det(A) = 0$.

2. Le résultat précédent est-il encore vrai si n est pair ?

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 19 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. Calculer sous forme factorisée :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

Exercice 4. 1. Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

2. En déduire

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C})$. On note C_1, C_2, C_3 et C_4 ses colonnes. Calculer $\det(C_1+C_3, C_2+C_4, C_1-C_3, C_2-C_4)$ en fonction de $\det(M)$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants de taille n suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \iddots & a_2 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (\max(i,j))_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = (\min(i,j))_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det(M)$ et $\det(N)$.

Exercice 8. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. Soit $D = \begin{pmatrix} c & b & \dots & b \\ a & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geq 2$. Soit $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne contenant que des 1. On pose $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \det(D + tU)$.

1. Montrer que P est une fonction affine.
2. Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$.
3. Calculer $\det(D)$.
4. Calculer $\det(D)$ lorsque $a = b$.

Exercice 9. Soit a, b, c trois réels et n un entier naturel non nul. On note

$$T_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et } \Delta_n = \det(T_{a,b,c}).$$

1. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \geq 3$, $\Delta_n = \alpha \Delta_{n-1} - \beta \Delta_{n-2}$.

2. On suppose que $X^2 - \alpha X + \beta$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2. Déterminer l'expression de Δ_n en fonction de r_1, r_2 et n.

Exercice 10. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et soit $E = \{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid y'' + ay' + by = 0\}$ qui est un sev de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
On prend $h \in \mathbb{R}$ et on considère l'application φ_h l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $\varphi_h(f) : t \mapsto f(t+h)$.

1. Montrer que φ_h est un endomorphisme de E.
2. Calculer $\det(\varphi_h)$.

Exercice 11. Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = XP' + P(1)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\det(u)$.
3. u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 12. Calculer le déterminant de l'endomorphisme $u : A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^\top \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\chi_A(x) = \det(xI_3 - A)$.
2. Déterminer les racines de χ_A.
3. Pour chaque racine λ de χ_A déterminer une base de $E_\lambda = \ker(\lambda I_3 - A)$.
4. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le déterminant de Vandermonde de $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ est défini par :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. On suppose qu'il existe $i \neq j$ tels que $a_i = a_j$. Que vaut $V(a_1, \ldots, a_n)$?
2. On suppose maintenant que $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$.
   (a) Justifier que P est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   (b) Déterminer le coefficient de degré $n-1$ de P.
   (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (x - a_k)$.
   (d) En déduire l'expression de $V(a_1, \ldots, a_n)$ en fonction de $a_1, \ldots, a_n$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ n^2 variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, P(m_{i,j} = 1) = P(m_{i,j} = -1) = \frac{1}{2}.$$

On note $M_n = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\delta_n = \det(M_n)$.
Calculer $E(\delta_n)$.

Exercice 16. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = I_n$. Calculer $\det(M)$ en fonction de $\mathrm{tr}(M)$.
On rappelle que pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.