

Colles 30 - 09/06/2025 au 13/06/2025

Thèmes traités en classe

- Chapitre 27 : Variables aléatoires.
Exercices traités en classe : 1, 2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 23.
- Chapitre 28 : Séries numériques.
Exercices traités en classe : 1, 2, 4, 7, 8, 9, 11, 12.
- Espaces préhilbertiens réels.
 1. Produit scalaire : définition, exemples.
 2. Norme associée à un produit scalaire, inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire.
 3. Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.
 4. Espaces euclidiens : bases orthonormales.
 5. Projection orthogonale sur un sev de dimension finie, supplémentaire orthogonal.
 6. Gram-Schmidt.
 7. Distance à un sev de dimension finie.

Exercices traités en classe : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

Questions de cours

Question 1

- C26 Exercice 12 : soit E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
 - ▷ Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
 - ▷ Donner la matrice de f dans cette base.
- C26 Exercice 17 : soit E de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Soit f l'endomorphisme de E tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
 - ▷ Déterminer une base de $F = \ker(f - \text{id}_E)$, $G = \ker(f - 2 \text{id}_E)$ et $H = \ker(f + 4 \text{id}_E)$.
 - ▷ Déterminer une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale et préciser les matrices de passage entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et la relation entre toutes ces matrices.
- Rappeler les lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale) et leurs espérances et variances. Démontrer la formule pour l'espérance d'une uniforme et d'une binomiale.
- Énoncer la formule de transfert puis exercice 10 : soit $X \sim \mathcal{U}([1, n])$ et $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$. Calculer $E(2^X)$ et $E(2^Y)$.
- Donner la définition de la variance et démontrer la formule de Huygens.
- Énoncer les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev. Démontrer Markov.
- Donner la définition de covariance de deux variables aléatoires puis exercice 20 : soit X et Y qui suivent $\mathcal{B}(p)$ (avec $p \in]0, 1[$) et $X \perp\!\!\!\perp Y$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Donner la loi de U , calculer $\text{Cov}(U, V)$, justifier que U et V ne sont pas indépendantes.
- Énoncer le lemme des coalitions. Exemple du cours : soit $m_{1,1}, m_{1,2}, m_{2,1}, m_{2,2}$ quatre variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi : $P(m_{i,j} = 1) = P(m_{i,j} = -1) = \frac{1}{2}$. On note $M = (m_{i,j})$ la variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer la probabilité que M soit inversible.
- Montrer que si $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, alors $u_n \rightarrow 0$. Donner un contre-exemple pour la réciproque.
- Énoncer et démontrer le critère de convergence par équivalence des SATP.
- En utilisant une comparaison série intégrale, montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge lorsque $\alpha > 1$.
- Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

- Pour tout f et $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
- Pour tout A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité. Démontrer l'inégalité.
- Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire.
- Montrer qu'une famille de vecteurs orthogonaux non nuls est libre.
- Soit F un sev de E préhilbertien. Montrer que $F^\perp$ est un sev de E et que F et $F^\perp$ sont en somme directe.
- Montrer que dans un espace euclidien E , toute famille orthonormale peut être complétée en une BON de E .
- Rappeler la formule de la projection orthogonale sur un sev de dimension finie puis expliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- C29 Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels tous distincts. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note L_i le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P|Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$.
 1. Montrer que $(\cdot | \cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
 2. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(L_i | P) = P(a_i)$.
 3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.
 4. En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i$.
 5. Soit $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{i=0}^n P(a_i) = 0 \right\}$. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $d(Q, H)$.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
 - ▷ Propriétés de l'espérance : linéarité, inégalité triangulaire, positivité, croissance.
 - ▷ Espérances et variances des lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale).
 - ▷ Formule de transfert.
 - ▷ Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
 - ▷ Formule de Huygens.
 - ▷ Loi de la somme de deux variables aléatoires en fonction de la loi conjointe.
 - ▷ Lemme des coalitions.
 - ▷ Convergence et somme des séries géométriques.
 - ▷ Convergence et somme des séries exponentielles.
 - ▷ Convergence des séries de Riemann.
 - ▷ Lien suite-série.
 - ▷ Critère de convergence sur les sommes partielles des SATP.
 - ▷ Comparaison de SATP.
 - ▷ Équivalence de SATP.
 - ▷ Inégalité de Cauchy-Schwarz avec le cas d'égalité.
 - ▷ Théorème de Pythagore.
 - ▷ Orthogonalité et liberté.
 - ▷ Coordonnées dans une BON.
 - ▷ Théorème de la BON incomplète.
 - ▷ Projection sur un sev de dimension finie.
 - ▷ Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
 - ▷ Distance à un sev de dimension finie.

A savoir faire

1. Savoir déterminer l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
2. Savoir déterminer le noyau et l'image d'une matrice.
3. Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases.
4. Savoir faire un changement de bases.
5. Savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire à la main, ou bien reconnaître une loi usuelle.
6. Savoir calculer l'espérance
 - en revenant à la définition;
 - en utilisant les lois usuelles;
 - en utilisant la formule de transfert;
 - en utilisant les propriétés de l'espérance.
7. Savoir calculer une variance, une covariance.
8. Savoir manipuler des variables aléatoires indépendantes.
9. Savoir étudier la nature d'une série :
 - en utilisant un équivalent;
 - en utilisant une comparaison (inégalité, o , O);
 - en comparant à une série de Riemann.
10. Savoir montrer qu'une application est un produit scalaire.
11. Savoir montrer que des vecteurs sont orthogonaux.
12. Savoir orthonormaliser une famille libre.
13. Savoir déterminer la projection orthogonale d'un vecteur sur un sev de dimension finie.
14. Savoir déterminer la distance d'un vecteur à un sev de dimension finie.