

Chapitre 30 : Déterminants

Dans tout le chapitre, on considère un $\mathbb{K}$ -ev E de dimension n .

I. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

I.1. Définition

Théorème I.1 (Admis)

Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Il existe une unique application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ qui est :

- linéaire par rapport à chacune de ses variables, i.e. :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, x \in E \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ est linéaire}$$

- alternée, i.e. :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, (\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Proposition I.2. Soit $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une application qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables et alternée. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

1. Si $i \neq j$, alors $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$. On dit que f est **antisymétrique**.
2. Si un vecteur x_i est nul, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
3. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Proposition I.3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Soit $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune de ses variable et alternée. Alors $f = f(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$.

Corollaire I.4. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Alors $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$.

Proposition I.5. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E . Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E ssi $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

I.2. Interprétation géométrique en dimension 2 et 3

Supposons d'abord que $n = 2$ et prenons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E .

Proposition I.6. Soit $x, y \in E$ dont les coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$ sont (a, b) et (c, d) . Alors $\det_{\mathcal{B}}(x, y) = ad - bc$.

Remarque I.1. $|\det_{\mathcal{B}}(x, y)|$ s'interprète comme l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs x et y , en prenant comme unité d'aire le parallélogramme construit sur e_1, e_2 .

Prenons maintenant $n = 3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E .

Proposition I.7. Soit x, y, z trois vecteurs de E de coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$, (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3) . Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - z_1 y_2 x_3 - z_2 y_3 x_1 - z_3 y_1 x_2.$$

Remarque I.2. $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)|$ mesure le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $x_1, \dots, x_n$, sachant que le volume unité est donné par celui engendré par $\mathcal{B}$.

II. Déterminant d'un endomorphisme

Proposition II.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ deux bases de E . Alors $\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(f(v_1), \dots, f(v_n))$.

Définition II.1. Soit E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Le **déterminant** de f est le scalaire $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ pour n'importe quelle $\mathcal{B}$ une base de E .

Corollaire II.2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E . Alors pour tout $x_1, \dots, x_n \in E$, $\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque II.1. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$: le déterminant de f mesure de quel facteur f amplifie les volumes dans E .

Proposition II.3. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det(\text{id}_E) = 1$.
2. $\det(\lambda f) = \lambda^{\dim(E)} \det(f)$.
3. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
4. f est un automorphisme ssi $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

III. Déterminant d'une matrice carrée

Définition III.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^n$, le **déterminant** de M est le scalaire $\det(M) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$.

Proposition III.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est

1. linéaire par rapport à chacune des colonnes :

$$\forall i \in [1, n], \forall C_1, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{K} \\ X & \mapsto \det(C_1 | \dots | C_{i-1} | X | C_{i+1} | \dots | C_n) \end{cases} \text{ est linéaire.}$$

2. $\det$ est **alternée** : si deux colonnes de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont égales, alors $\det(M) = 0$.

3. $\det(I_n) = 1$.

De plus, si $u \in \mathcal{L}(E)$, $x_1, \dots, x_n \in E$ et $\mathcal{B}$ est une base de E alors $\det(u) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ et $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n))$.

Notation III.1. Si $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note aussi : $\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$.

Proposition III.2. Pour $n = 2$: soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $\det(M) = ad - bc$.

Proposition III.3 (Admis). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\det(M^T) = \det(M)$. Autrement dit, toutes les propriétés données sur les colonnes sont aussi vraies pour les lignes.

Proposition III.4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit N la matrice obtenue à partir de M en échangeant deux colonnes. Alors $\det(N) = -\det(M)$. On dit que $\det$ est **antisymétrique**.
2. Si une colonne de M est nulle, alors $\det(M) = 0$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.
4. $\det(\text{diag}(d_1, \dots, d_n)) = d_1 \times \dots \times d_n$.

IV. Calculs de déterminants

IV.1. Pivot de Gauss

Proposition IV.1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.

1. Si N est la matrice obtenue en faisant $C_i \leftrightarrow C_j$, alors $\det(N) = -\det(M)$.
2. Si N est la matrice obtenue en faisant $C_j \leftarrow \lambda C_j$, alors $\det(N) = \lambda \det(M)$.
3. Si N est la matrice obtenue en faisant $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$, alors $\det(N) = \det(M)$.

Les énoncés analogues sur les lignes sont aussi vrais.

Remarque IV.1. On ne change donc pas la valeur du déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Corollaire IV.2. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

IV.2. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Définition IV.1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Le **mineur** de position (i, j) de M , noté $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice $(m_{kl})_{\substack{k \neq i \\ l \neq j}} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne de M .

Proposition IV.3. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

1. On peut développer le déterminant de M par rapport à la i -ième ligne :

$$\det(M) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} m_{ik} \Delta_{i,k}.$$

2. On peut développer le déterminant de M par rapport à la j -ième colonne :

$$\det(M) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} m_{k,j} \Delta_{k,j}.$$

IV.3. Déterminant et opérations

Proposition IV.4.

1. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ linéaire par rapport à chaque colonne et alternée. Alors $\varphi = \varphi(I_n) \det$.
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Remarque IV.2. Attention, en général, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Corollaire IV.5. 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$M \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(M) \neq 0$$

$$\text{De plus, si } M \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \text{ alors } \det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}.$$

2. Deux matrices semblables ont le même déterminant.