

Contrôle de cours 22 - Séries / Espaces préhilbertiens / Déterminants - Sujet A

Jeudi 12 juin 2025

Nom et prénom :

.....

Durée : 15 minutes.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Question 1 (6 pts)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs. Cocher la ou les bonnes cases :

1. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\sum u_n$ converge :

☐ Vrai

☐ Faux

Justification :

2. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ diverge alors :

☐ $\sum u_n$ diverge;

☐ $\sum u_n$ converge;

☐ on ne peut rien dire!

3. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum u_n$ diverge alors :

☐ $\sum v_n$ diverge;

☐ $\sum v_n$ converge;

☐ on ne peut rien dire!

4. Si $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors :

☐ si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge;

☐ si $\alpha > 0$, $\sum u_n$ converge;

☐ si $\alpha \leq 0$, $\sum u_n$ diverge;

☐ on ne peut rien dire!

5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

☐ VRAI

☐ FAUX

6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$

☐ VRAI

☐ FAUX

☐

Question 2 (4 pts)

Déterminer la nature des séries :

1. $\sum_{n \geq 1} e^{-\frac{1}{n}}$

3. $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n + n}{n2^n}$

2. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n)}{2^n}$

4. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$

Question 3 (2 pts)

On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Soit $u_1 = (1, -1)$ et $u_2 = (2, 1)$. Orthonormaliser la famille (u_1, u_2) .

Question 4 (4 pts)

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$.

1. Déterminer une base de $F^\perp$.
2. Soit $v = (1, 0, 0)$. Déterminer le projeté orthogonal de v sur F .
3. Calculer $d(v, F)$.

Question 5 (1 pt)

Justifier que la famille $u_1 = (5, 1, -3)$, $u_2 = (0, 2, 1)$, $u_3 = (-2, 1, 4)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 6 (2 pts)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de λ est-ce que $u - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ est inversible?

□

Contrôle de cours 22 - Séries / Espaces préhilbertiens / Déterminants - Sujet B

Jeudi 12 juin 2025

Nom et prénom :

.....

Durée : 15 minutes.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Question 1 (6 pts)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs. Cocher la ou les bonnes cases :

1. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$:

☐ Vrai

☐ Faux

Justification :

2. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ converge alors :

☐ $\sum u_n$ diverge;

☐ $\sum u_n$ converge;

☐ on ne peut rien dire!

3. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum u_n$ converge alors :

☐ $\sum v_n$ diverge;

☐ $\sum v_n$ converge;

☐ on ne peut rien dire!

4. Si $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ alors :

☐ si $\alpha < 1$, $\sum u_n$ diverge;

☐ si $\alpha < 0$, $\sum u_n$ diverge;

☐ si $\alpha \geq 0$, $\sum u_n$ converge;

☐ on ne peut rien dire!

5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

☐ VRAI

☐ FAUX

6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda f) = \lambda \det(f)$

☐ VRAI

☐ FAUX

☐

Question 2 (4 pts)

Déterminer la nature des séries :

1. $\sum_{n \geq 1} e^{-\frac{1}{n^2}}$

3. $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n + n}{n^2 2^n}$

2. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n)}{n!}$

4. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}} + 1}$

Question 3 (2 pts)

On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Soit $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (2, -1)$. Orthonormaliser la famille (u_1, u_2) .

Question 4 (4 pts)

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 1y + 3z = 0\}$.

1. Déterminer une base de $F^\perp$.
2. Soit $v = (1, 0, 0)$. Déterminer le projeté orthogonal de v sur F .
3. Calculer $d(v, F)$.

Question 5 (1 pt)

Justifier que la famille $u_1 = (5, 0, -2)$, $u_2 = (1, 2, 1)$, $u_3 = (-3, 1, 4)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 6 (2 pts)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ défini pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $u(P) = XP' - aP$. Pour quelles valeurs de a est-ce que u est inversible? Commencer par déterminer la matrice de u dans la base canonique. $\square$