Contrôle de cours 22 - Séries / Espaces préhilbertiens / Déterminants - Sujet A

Jeudi 12 juin 2025

Question 1 (6 pts)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs. Cocher la ou les bonnes cases :

1. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\sum u_n$ converge : **FAUX!**
 Justification : **Par exemple, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, mais la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge!**
2. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ diverge alors **on ne peut rien dire!**
3. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum u_n$ diverge alors **$\sum v_n$ diverge.**
4. Si $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors **si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge.**
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ VRAI FAUX
6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$ VRAI FAUX

Question 2 (4 pts)

Déterminer la nature des séries :

1. $\sum_{n \geq 1} e^{-\frac{1}{n}}$
 On a $e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc la série diverge grossièrement. 2. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n)}{2^n}$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left \frac{\sin(n)}{2^n} \right \leq \frac{1}{2^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente. Donc, par comparaison de SATP, la série converge absolument. 3. $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n + n}{n2^n}$ | <ol style="list-style-type: none"> 4. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$
 On a $\frac{2^n + n}{n2^n} \sim \frac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. Donc, par comparaison de SATP, la série diverge. On a $\frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc, par comparaison de SATP, la série converge. ☐ |
|---|---|

Question 3 (2 pts)

On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Soit $u_1 = (1, -1)$ et $u_2 = (2, 1)$. Orthonormaliser la famille (u_1, u_2) .

On pose $f_1 = u_1$, puis $f_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = (2, 1) - \frac{1}{2}(1, -1) = (3/2, 3/2)$.

Puis, $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ et $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$.

Question 4 (4 pts)

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$.

1. Déterminer une base de $F^\perp$.
On a $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x, y, z), (1, 2, 3) \rangle = 0\}$. Donc $u = (1, 2, 3) \in F^\perp$. Comme $\dim(F^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(F) = 1$, u forme une base de $F^\perp$.

2. Soit $v = (1, 0, 0)$. Déterminer le projeté orthogonal de v sur F .

On calcule le projeté sur $F^\perp$: $p_{F^\perp}(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u = \frac{1}{14}(1, 2, 3)$. Donc $p_F(v) = v - p_{F^\perp}(v) = \frac{1}{14}(13, -2, -3)$.

3. Calculer $d(v, F)$.

$$d(v, F) = \|p_{F^\perp}(v)\| = \frac{1}{14} \|(1, 2, 3)\| = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

□

Question 5 (1 pt)

Justifier que la famille $u_1 = (5, 1, -3)$, $u_2 = (0, 2, 1)$, $u_3 = (-2, 1, 4)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 35 - 14 =$

$21 \neq 0$, donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

□

Question 6 (2 pts)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de λ est-ce que $u - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ est inversible?

$\det(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 6 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((4-\lambda)(-1-\lambda) - 6) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 10) = (2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+2)$. Donc $u - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ est inversible ssi $\lambda \notin \{-2, 2, 5\}$.

□

Contrôle de cours 22 - Séries / Espaces préhilbertiens réels / Déterminants - Sujet B

Jeudi 12 juin 2025

Question 1 (6 pts)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs. Cocher la ou les bonnes cases :

1. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: **Vrai**
 Justification : On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ pour $n \geq 0$. On a alors $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 1$, et comme (S_n) converge, $u_n \rightarrow 0$.
2. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum u_n$ converge alors **on ne peut rien dire!**
4. Si $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ alors **si $\alpha < 1$, $\sum u_n$ diverge.**
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ■ VRAI □ FAUX
6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda f) = \lambda \det(f)$ □ VRAI ■ FAUX □

Question 2 (4 pts)

Déterminer la nature des séries :

1. $\sum_{n \geq 1} e^{-\frac{1}{n^2}}$
 On a $e^{-\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc la série diverge grossièrement. 2. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n)}{n!}$
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left \frac{\sin(n)}{n!} \right \leq \frac{1}{n!}$ qui est le terme général d'une série exponentielle. Donc, par comparaison de SATP, la série converge absolument. | <ol style="list-style-type: none"> 3. $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n + n}{n^2 2^n}$
 On a $\frac{2^n + n}{n^2 2^n} \sim \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc, par comparaison de SATP, la série converge. 4. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2} + 1}}$
 On a $\frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2} + 1}} \sim \frac{1}{n}$ qui est le terme général de la série harmonique, qui diverge. Donc, par comparaison de SATP, la série diverge. □ |
|--|--|

Question 3 (2 pts)

On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Soit $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (2, -1)$. Orthonormaliser la famille (u_1, u_2) .

On pose $f_1 = u_1$, puis $f_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = (2, -1) - \frac{1}{2}(1, 1) = (3/2, -3/2)$.

Puis, $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ et $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1)$. □

Question 4 (4 pts)

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 1y + 3z = 0\}$.

1. Déterminer une base de $F^\perp$.
 On a $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x, y, z), (2, 1, 3) \rangle = 0\}$. Donc $u = (2, 1, 3) \in F^\perp$. Comme $\dim(F^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(F) = 1$, u forme une base de $F^\perp$.

2. Soit $v = (1, 0, 0)$. Déterminer le projeté orthogonal de v sur F .

On calcule le projeté sur $F^\perp$: $p_{F^\perp}(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u = \frac{1}{14}(4, 2, 6)$. Donc $p_F(v) = v - p_{F^\perp}(v) = \frac{1}{14}(10, -2, -6)$.

3. Calculer $d(v, F)$.

$$d(v, F) = \|p_{F^\perp}(v)\| = \frac{1}{14} \|(4, 2, 6)\| = \frac{2}{\sqrt{14}}. \quad \square$$

Question 5 (1 pt)

Justifier que la famille $u_1 = (5, 0, -2)$, $u_2 = (1, 2, 1)$, $u_3 = (-3, 1, 4)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 35 - 14 =$

$21 \neq 0$, donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. □

Question 6 (2 pts)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ défini pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $u(P) = XP' - aP$. Pour quelles valeurs de a est-ce que u est inversible?

Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$: $\det(u) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = -a(1-a)(2-a)$.

Donc u est inversible ssi $a \notin \{0, 1, 2\}$.