Inégalités - Exercices

Exercice 1. 1. Écrire les fractions suivantes sous forme irréductible (c'est-à-dire en les simplifiant au maximum). Il faut essayer de faire le maximum de simplifications à chaque étape avant de continuer les calculs.

(a) $A = \frac{1}{2} \times \frac{8}{7}$

(b) $B = \frac{7}{8} \times \frac{4}{18} \times \frac{3}{14}$

(c) $C = 3 \times \frac{9}{2}$

(d) $D = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$

(e) $E = \frac{3}{\frac{9}{2}}$

(f) $F = \frac{\frac{9}{2}}{3}$

(g) $G = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right)$

(h) $H = \left(3 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{8-2}{5+2}$

(i) $I = \dfrac{3 - \frac{5}{7} + \frac{1}{2}}{3 + \frac{5}{7} - \frac{1}{2}}$

(j) $J = \dfrac{5 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$

2. Mettre les fractions suivantes au même dénominateur puis simplifier au maximum. Il faut essayer de choisir le dénominateur le plus simple à chaque fois.

(a) $A = \frac{2x-1}{x-1} + \frac{3x}{x-2}$

(b) $B = \frac{u-1}{u+1} - \frac{u+1}{u-1}$

(c) $C = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{(2x-1)^2}$

Exercice 2. Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression.

1. $A = \frac{5^2 + 4^2}{34 + 28}$
2. $B = 10^1 + 2.10^2 + 3.10^3$
3. $C = \frac{2.10^5 \times (5.10^2 + 2.10^3)}{7.10^1 + 2.10^2}$
4. $D = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$
5. $E = \frac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2}$
6. $F = 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9}$
7. $G = (a^3)^2 \times a^{-4}$
8. $H = a^2 b^{-3} (ab)^4$

Exercice 3. 1. Calculer les nombres suivants (les résultats doivent être mis sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers) :

(a) $A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$

(b) $B = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8}$

(c) $C = (2\sqrt{2} - 5)(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

(d) $D = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(e) $E = (3\sqrt{2} - 1)^2 - (2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$

(f) $F = (2\sqrt{5} - 3)^2 - (2\sqrt{5} + 3)^2$

2. Écrire les nombres suivants comme des quotients ayant un dénominateur entier :

(a) $A = \sqrt{\frac{1}{24}}$

(b) $B = \frac{3}{\sqrt{2}}$

(c) $C = \frac{5}{2\sqrt{3}}$

(d) $D = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

(e) $E = \frac{3}{\sqrt{2} - 1}$

(f) $F = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

(g) $G = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

(h) $H = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

Exercice 4. 1. Développer et réduire les expressions suivantes.

(a) $A(x) = -(x-3) + 3(2x-1) - 2(2x-3)$

(b) $B(x) = x - 2 - 5(x-3) - 3(-3x-4)$

(c) $C(x) = x(x-1)(x-4) - x^2(x-3)$

(d) $D(x) = (x-1)^2(x+2) - (2x+1)^2(x+1)$

(e) $E(x, y) = \left(3x - 2y\right)^2 - 5\left(x + 3y\right)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes.

(a) $A(x) = (x+1)(x-3) - 2(x+1)$

(b) $B(x) = (5-2x)(x-1) + x^2 - 1$

(c) $C(x) = (1-2x)^2 - x^2$

(d) $D(x) = 4x^2 - 1 + (2x-1)(x+1)$

(e) $E(x) = 4x^2 - 8x + 4 - (x+7)^2$

(f) $F(x) = x^2 - 4 + x - 2$

(g) $G(x) = (2x-3)^2 - (2x-3)$

3. (a) Posons $A = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

i. Vérifier que $A^2 = 16$.

ii. Justifier que $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} \leq \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$. Quel est le signe de A?

iii. Que vaut A?

(b) Reprendre les trois questions précédentes pour montrer que :

i. $B = \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{10}$ ii. $C = \sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}} = \sqrt{14}$ iii. $D = \sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}} = \sqrt{14}$

Exercice 5. 1. Résoudre les équations/inéquations suivantes :

(a) $13x+2-(x-3)=x-5-3(x+12)+4x$

(b) $5(3x-1)-(1-2x)\leq 3(5x-2)$

(c) $\dfrac{a-1}{4}-5<\dfrac{2a-3}{2}+\dfrac{3}{4}$

(d) $\dfrac{2x+3}{6}-\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{x+2}{3}+2$

(e) $\dfrac{1-2\alpha}{5}-\dfrac{\alpha-2}{10}>\dfrac{5\alpha+2}{2}-\dfrac{1}{5}$

(f) $\dfrac{3x+5}{7}=\dfrac{5x-2}{5}$

(g) $\dfrac{5(t-2)}{8}+\dfrac{3(1-t)}{5}=\dfrac{2t+3}{10}$

2. Exprimer l'inconnue entourée en fonction des autres :

(a) $\dfrac{2Ru}{nT}=\dfrac{1}{\boxed{A}}$

(b) $\dfrac{2R\boxed{u}}{nT}=\dfrac{1}{A}$

(c) $\dfrac{2Ru}{n\boxed{T}}=\dfrac{1}{A}$

(d) $\dfrac{a}{\boxed{b}}=\dfrac{c}{d}+1$

(e) $U_2=\dfrac{\frac{\boxed{U_m}}{R_4}+\frac{V_0}{R_3}}{\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_3}}$

3. Résoudre les équations/inéquations suivantes en factorisant au maximum :

(a) $(x+2)^2=(x+2)(5x-4)$

(b) $9x^2-16\leq 0$

(c) $(2x+3)^2=49$

(d) $5x^2-7x>0$

(e) $4x^2-9-2(2x-3)=0$

(f) $(3x-4)(5x+7)<(3x-4)(3x+1)$

4. Résoudre les équations/inéquations suivantes en utilisant le discriminant :

(a) $2x^2-3x+1=0$

(b) $3x^2+5x+4=0$

(c) $-\dfrac{3}{4}x^2-6x+4=-x^2-3x-5$

(d) $\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}=0$

(e) $-x^2+2x-9>0$

(f) $(x-2)^2+3(x-1)\left(x-\dfrac{5}{3}\right)=0$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ (en fonction du paramètre m pour les trois dernières) :

a) $\dfrac{1}{x}>-1$

b) $-1<\dfrac{1-u}{1+u}<1$

c) $0\leq\dfrac{y-1}{y+1}\leq 1$

d) $x^2\leq x^3$

e) $\dfrac{1}{\theta}\leq\theta$

f) $a^3\leq\dfrac{1}{a}$

g) $\dfrac{(1+x^2)(5-x)}{1-2x}\leq 0$

h) $\dfrac{(1+x)(5-x)}{(1-2x)(3-2x)}\geq 0$

i) $\dfrac{(2x+3)(2-7x)}{x-4}\geq 3$

j) $x^2-2mx+1\geq 0$

k) $\dfrac{m}{x-1}\leq\dfrac{1}{x+2}$

l) $\sqrt{2x+m}\geq x+1$

Exercice 7. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $|x-2|=1$

b) $|x-3|\geq 2$

c) $|x-4|=2x+10$

d) $|x-2|=2|x+1|$

e) $|2x+1|<1$

f) $|x-1|<|x+1|$

g) $|x+3|-2|x-1|>2$

h) $|x^2-x+1|=4x-5$

Exercice 8. Soient $a\in[1,5]$, $b\in[-2,3]$ et $c\in[2,3]$.

1. Majorer : (a) $a+b$ (b) $2a+3b$ (c) $a-b$ (d) $2c-b-1$ (e) $\dfrac{a+b}{c}$

2. Minorer : (a) $a+b$ (b) $2a+3b$ (c) $a-b$ (d) $2c-b-1$ (e) $\dfrac{a+b}{c}$

Exercice 9. 1. Montrer que pour tout $x\geq 0$, $\sin(x)\leq x$, puis $\cos(x)\geq 1-\dfrac{x^2}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x\geq 1+x$.

Exercice 10. 1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$, $\dfrac{x^2-3x+2}{x+\sqrt{x}-2}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x-2)}{\sqrt{x}+2}$.

2. En déduire que pour tout $x\in[0,2]\setminus\{1\}$, $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x+\sqrt{x}-2}\right|\leq 2$.

Exercice 11. 1. Soit $a \in]1, +\infty[$.

(a) Résoudre l'équation $X^2 - 2aX + 1 = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$.

(b) Justifier que $a - \sqrt{a^2 - 1}$ est strictement positif.

(c) Déterminer le signe de $\sqrt{a-1}(\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1})$.

(d) En déduire que $a - \sqrt{a^2 - 1} < 1$.

(e) Justifier que $a + \sqrt{a^2 - 1} > 1$.

2. Soit $y \in]1, +\infty[$. Justifier que l'équation $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet exactement deux solutions réelles, de signes opposés.

Exercice 12. Soient x et y deux nombres réels. Donner un expression explicite en fonction de x, y et $|x - y|$ de $\max(x, y) + \min(x, y)$, $\max(x, y) - \min(x, y)$ puis de $\max(x, y)$ et $\min(x, y)$.

Exercice 13. Soient a et b deux réels distincts. Déterminer une valeur $\varepsilon > 0$ en fonction de a et b telle que les intervalles $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ et $[b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ soient disjoints. On pourra faire un dessin pour s'aider.

Exercice 14. 1. (a) Calculer $\left\lfloor \frac{27}{13} \right\rfloor$, $\left\lfloor \sqrt{13} \right\rfloor$, $\lfloor 1,02 \rfloor$, $\lfloor 2,04 \rfloor$, $\lfloor 2,04 + 1,02 \rfloor$ et $\lfloor 2,04 \times 1,02 \rfloor$.

(b) Calculer $\left\lfloor -\frac{17}{3} \right\rfloor$, $\lfloor -1,02 \rfloor$, $\lfloor -2,04 \rfloor$ et $\lfloor -2,04 - 1,02 \rfloor$.

2. Tracer la courbe représentative de la fonction $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. 1. Montrer que pour tout réel x, $0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1$.

2. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

3. A-t-on : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

4. A-t-on : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$?

5. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 16. 1. (a) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour avoir l'égalité $|xy| = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

2. Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que

(a) $\frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2xy}$

(b) $\frac{x + y}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

(c) $\frac{2xy}{x + y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$

(d) $1 + \sqrt{xy} \leq \sqrt{1 + x}\sqrt{1 + y}$

(e) * $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{xy}$.

3. (a) Montrer que : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ pour tous $x, y > 0$.

(b) En déduire que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$ pour tous $a, b, c > 0$.

Exercice 17. 1. Lorsque $x \in [0, 1]$, vérifier que $0 \leq x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$.

2. Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer qu'au moins un des trois réels $a(1 - b)$, $b(1 - c)$ et $c(1 - a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice 18 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). 1. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels. En considérant la fonction polynomiale $P(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + xb_k)^2$, démontrer que :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

2. Montrer que pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n$ strictement positifs, on a : $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$.