

Pour bien commencer l'année

I. Conseils de rédaction

I.1. Bien présenter ses calculs

Un calcul, c'est un enchaînement d'égalités, on les présente :

1. les unes sous les autres ;
2. les barres de fractions au niveau du symbole d'égalité ;
3. sans hésiter à détailler les calculs quitte à ajouter des lignes ;
4. en prenant bien soin de développer les expressions sans faire d'erreur de signe ;
5. en simplifiant tous les produits et quotients dès que possible afin d'éviter des calculs trop complexes.

Application I.1. Simplifier $A = \frac{1}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{5}}}}$.

I.2. Démontrer une égalité

Lorsqu'il s'agit de démontrer une égalité, on prendra bien garde de ne pas partir du résultat. Par exemple, pour démontrer l'égalité $A = B$, on pourra à partir de transformations sur l'expression A , arriver à l'expression B . En aucun cas une démonstration ne peut se terminer par $0 = 0$ qui, bien qu'incontestable, n'est pas un résultat très étonnant. On disposera donc la progression de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A &= \dots \\ &= \dots \\ &= B \end{aligned}$$

Afin de conclure que $A = B$.

Application I.2. Montrer que pour tout nombre réel x , on a $4x^2 - 4x + 2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$.

I.2.1 Équations et inéquations (algèbre de base)

La présentation de la résolution d'une équation doit être rigoureuse. On passe d'une équation à une autre équation (qui lui est équivalente) à l'aide d'opérations élémentaires :

1. Multiplication par un réel ;
2. Ajout d'un réel ;
3. Factorisation ;
4. Développement ;
5. ...

La résolution d'équations et d'inéquations se résume souvent à factoriser une expression qui doit être nulle (ou positive).

Application I.3. Résoudre $(x+2)^2 = (x+2)(5x-4)$ puis $(x+2)^2 \geq (x+2)(5x-4)$.

II. Les bases du calcul

II.1. Produits et fractions

Méthode. Soient a, b, c et d quatre nombres réels. On s'assure toujours que le dénominateur n'est pas nul.

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $a \times b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$; • $-(a + b + c) = -a - b - c$; • $-(a \times b \times c) = (-a) \times b \times c = a \times (-b) \times c = a \times b \times (-c)$; • Diviser par $a \neq 0$ revient à multiplier par $\frac{1}{a}$; | <ul style="list-style-type: none"> • $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$ (on peut simplifier par un facteur commun) ; • $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ et $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$; |
|---|---|

• $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$; • $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$; • $\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b}$;	• $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$; • $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$;
--	---

Remarques II.1. 1. Pour simplifier un terme dans une fraction, il doit être **en facteur** au numérateur et au dénominateur. Ainsi, pour simplifier $\frac{6x+3}{3}$, on commence par factoriser le numérateur et le dénominateur : $\frac{6x+3}{3} = \frac{\cancel{3}(2x+1)}{\cancel{3}} = 2x+1$.

2. Lorsqu'on soustrait deux fractions, on prend garde aux signes :

$$\frac{1}{2} - \frac{2x+3}{2} = \frac{1-(2x+3)}{2} = \frac{1-2x-3}{2} = \frac{-2x-2}{2} = \frac{2(-x-1)}{2} = -x-1.$$

II.2. Puissances

Méthode. Soient a et b deux réels et m, n deux entiers.

• Lorsque n est positif, $a^n = a \times a \times a \dots \times a$ (n fois); • $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; • $a^0 = 1$; • $a^n a^m = a^{n+m}$;	• $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; • $(a^n)^m = a^{n \times m}$ • $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; • $(ab)^n = a^n b^n$
--	---

Remarque II.2. Attention, en général, $(a+b)^n$ n'est pas égal à $a^n + b^n$! Par exemple $(1+2)^3 = 3^3 = 27$, mais $1^3 + 2^3 = 1+8 = 9$. Quand on a une somme mise à une puissance, on commence par calculer la somme, puis on passe à la puissance.

II.3. Racines carrées

Méthode. Pour $a, b \geq 0$,

• $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; • $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;	• $\sqrt{a^2} = a$; • $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ (quantité conjuguée).
--	---

Pour a quelconque, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemples II.1. 1. En général, on essaye de mettre les réels qui s'écrivent avec des racines carrées sous la forme $a + b\sqrt{c}$. Pour cela, il faut factoriser au maximum le nombre sous la racine afin de faire ressortir tous ses diviseurs carrés. Par exemple, pour simplifier $\sqrt{216}$, on factorise $216 = 8 \times 27 = 2^3 \times 3^3 = 2^2 \times 3^2 \times 2 \times 3$, donc $\sqrt{216} = 2 \times 3 \sqrt{2 \times 3} = 6\sqrt{6}$.

2. Lorsqu'on a une racine carrée dans une fraction, on fait de son mieux pour qu'elle n'apparaisse pas au dénominateur.

Par exemple, pour écrire proprement $\frac{1}{\sqrt{3}}$, on multiplie en haut et en bas par $\sqrt{3}$: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Toutefois, lorsque la racine carrée n'est pas seule au dénominateur, on utilise en général la quantité conjuguée.

Par exemple, pour écrire proprement $1 + \frac{2}{\sqrt{2}-1}$, on multiplie la fraction par $\sqrt{2}+1$ au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{\sqrt{2}-1} &= 1 + \frac{2 \times (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= 1 + \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}^2 - 1^2} \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{2}+2}{2-1} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = -1 + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

II.4. Calcul littéral

Méthode. Développer c'est écrire un produit sous forme de somme. On peut utiliser (dans cet ordre) :

- les identités remarquables.
- la distributivité;

Factoriser c'est écrire une somme sous forme de produit. On peut utiliser (dans cet ordre) :

- les facteurs communs;
- les identités remarquables.

Pour tous réels a et b ,

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$3. (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

II.5. Équations - inéquations

Méthode. • Pour résoudre une équation du premier degré avec une inconnue, on isole l'inconnue.

- Pour résoudre une équation du degré supérieur, on fait passer tous les termes du même côté puis on factorise au maximum. On utilise ensuite la propriété du produit nul.
- Pour faire une étude de signe/résoudre une inéquation, on commence par factoriser au maximum l'expression. On fait ensuite un tableau de signes avec une ligne par facteur, puis on utilise les cas bien connus des fonctions affines et du second degré et la règle des signes pour remplir le tableau.
- Pour résoudre une équation/inéquation avec des fractions dont les dénominateurs font apparaître les inconnues, on commence par mettre tous les termes du même côté puis on met tout sur le même dénominateur et on factorise.

Exemple II.2. Résolvons l'inéquation $\frac{2x+1}{x-1} > \frac{1}{x+1}$.

- On commence par passer tous les termes du même côté :
- On met au même dénominateur :

et on simplifie :

- On obtient trois termes dont on détermine les signes :
 - 1.
 - 2.
 3. Pour le terme de degré 2, on calcule son discriminant

On résume ensuite tous les signes dans un tableau :

On lit enfin l'ensemble des solutions dans la ligne des x . Ainsi l'ensemble des solutions est :