Chapitre 1 : Inégalités

I. Comparaison de nombres réels

Définition I.1. L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une **relation** $\leq$: pour tous nombres réels x et y, $x \leq y$ est vraie si et seulement si $y - x$ est un nombre positif ou nul. On dit alors que x est **inférieur** à y.

Proposition I.1.
1. ***Reflexivité :*** *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$;*
2. ***Antisymétrie :*** *Pour tous réels x, y, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$;*
3. ***Transitivité :*** *Pour tous réels x, y et z, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$;*
4. ***Compatibilité avec l'addition :*** *Pour tous réels x, y, z et t, si $x \leq y$ et $z \leq t$, alors $x + z \leq y + t$;*
5. ***Compatibilité avec la multiplication :*** *Pour tous réels x, y et z,*
   (a) *si $x \leq y$ et $0 \leq z$ alors $xz \leq yz$;*
   (b) *si $x \leq y$ et $z \leq 0$, alors $yz \leq xz$.*
6. ***Passage à l'inverse :*** *Pour tous réels x et y*
   (a) *si $0 < x \leq y$ alors $0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$;*
   (b) *si $x \leq y < 0$ alors $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$.*

Remarques I.1.
1. Une relation qui vérifie les trois premiers points de la proposition s'appelle une **relation d'ordre**.
2. Étant donnés deux réels x et y, on a forcément $x \leq y$ ou $y \leq x$: on dit que la relation est **totale**.
3. La relation $\leq$ est aussi compatible avec la soustraction (en ajoutant les opposés) et la division (en multipliant par l'inverse).

Définition I.2. L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation **d'ordre strict** :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \iff x \leq y \text{ et } x \neq y.$$

II. Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition II.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

Lorsque les deux bornes sont finies :
- **Intervalle fermé :** $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$;
- **Intervalle ouvert :** $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;
- **Intervalle semi-ouvert :** $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$;
- **Intervalle semi-ouvert :** $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$;

Lorsqu'une des bornes est infinie :
- **Intervalle semi-ouvert :** $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$;
- **Intervalle ouvert :** $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;
- **Intervalle semi-ouvert :** $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$;
- **Intervalle ouvert :** $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$;

Et le dernier $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Remarques II.1.
1. Lorsqu'on représente graphiquement un intervalle sur la droite réelle, on précise les bornes avec les crochets dans le bon sens.
2. Si $a > b$, alors l'intervalle $[a, b]$ est vide. On le note $\emptyset$. Il en va de même si on change le sens des crochets.

Définition II.2. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
1. La réunion de I et de J, notée $I \cup J$, est l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J :

$$I \cup J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ ou } x \in J\}.$$

2. L'intersection de I et de J, notée $I \cap J$, est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J.
$$I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ et } x \in J\}.$$

Remarque II.2. Attention, en mathématiques, le « ou » est toujours inclusif : lorsqu'on écrit « $x \in I$ ou $x \in J$ », cela signifie que soit x est dans I, soit il est dans J, soit il est dans les deux.

Proposition II.1. *L'intersection de deux intervalles est un intervalle.*

Proposition II.2. *Soit $I \subset \mathbb{R}$. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si*
$$\forall a, b \in I, a \leq b \Rightarrow [a, b] \subset I.$$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties « sans trou » (qu'on appelle convexes).

Question. La réunion de deux intervalles est-elle un intervalle ?

III. Résolution d'inéquations

III.1. Avec un tableau de signes

Voir la fiche « Pour bien commencer l'année ».

III.2. Graphiquement

Définition III.1. Soit f une fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le **graphe de** f est l'ensemble
$$\mathscr{C}_f = \left\{(x, f(x)), x \in D\right\}.$$
C'est l'ensemble d'équation $y = f(x)$.

Définition III.2.
- Soit $m \in \mathbb{R}$. Les **antécédents** de m par f sont les solutions de l'équation $f(x) = m$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. L'**image** de x par f est $f(x)$.

Méthode. Pour résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = m$,
- on trace le graphe de f dans un repère ;
- on trace la droite horizontale $y = m$;
- les solutions (s'il y en a) sont les abscisses des points d'intersection du graphe et de la droite.

Pour une équation du type $f(x) = g(x)$, on trace les graphes de f et g puis on cherche les abscisses de leurs points d'intersection.
Pour résoudre une inéquation $f(x) \geq m$, on reprend les deux premières étapes, mais on cherche ensuite les abscisses de tous les points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au-dessus de la droite $y = m$.

IV. Montrer une inégalité

On considère deux fonctions f et g définies sur un ensemble D. Contrairement au paragraphe précédent dans lequel on cherche à trouver pour quelles valeurs de x on a une inégalité du type $f(x) \geq g(x)$, ici on cherche à démontrer que **pour tout** x dans D, on a $f(x) \geq g(x)$. On se ramène en général à montrer que $f(x) - g(x) \geq 0$ puis à faire une étude de la fonction $f - g$ (en dressant le tableau de variations par exemple.

Exemple IV.1. Montrons que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
On pose $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ qui est dérivable sur $]-1, +\infty[$ de dérivée $f' : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$. Le tableau de signe de f' donne les variations de f qui est décroissante sur $]-1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Donc f atteint un minimum en 0 qui vaut $f(0) = 0$. Autrement dit, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f(x) \geq f(0) = 0$ ce qui montre l'inégalité voulue.

V. Valeur absolue

Définition V.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Pour tous réels x et y, la **distance entre x et y** est $d(x, y) = |y - x|$.

Remarque V.1. Il découle de la définition que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$.

Proposition V.1. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:*

1. $|x| = 0 \iff x = 0$ *;*
2. $|-x| = |x|$ *;*
3. $|x| = |y| \iff x = y$ *ou* $x = -y$ *;*
4. $|xy| = |x||y|$, $|x^n| = |x|^n$ *;*
5. ***Inégalité triangulaire :***
   (a) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *;*
   (b) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$.

Proposition V.2. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$.*

1. *Les solutions de l'équation $|x - a| = r$ sont $a - r$ et $a + r$.*
2. *Les solutions de l'inéquation $|x - a| \leq r$ forment l'intervalle $[a - r, a + r]$.*
3. *Les solutions de l'inéquation $|x - a| \geq r$ forment l'ensemble $]-\infty, a - r] \cup [a + r, +\infty[$.*

Remarques V.2.

1. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$.
2. Les solutions pour les inéquations strictes sont presque les mêmes : il faut faire attention au sens des crochets.
3. Pour éviter de se tromper en utilisant la proposition précédente, on pourra s'aider d'une représentation graphique.

VI. Partie entière

Définition VI.1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle **partie entière de** x le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x$. On la note $\lfloor x \rfloor$.

Proposition VI.1.

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, si $n \leq x$ alors $n \leq \lfloor x \rfloor$.*
3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.*
4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.*

Définition VI.2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle **partie fractionnaire de** x le nombre $x - \lfloor x \rfloor$.

Remarque VI.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre $\dfrac{\lfloor 10^p \cdot x \rfloor}{10^p}$ est la valeur décimale approchant x à 10^{-p} près.