Devoir sur temps libre 2

(À remettre le MARDI 23 SEPTEMBRE 2025)

Exercice 1 (Des racines n-ièmes de l'unité).
On fixe un entier naturel $n \geq 2$ et on considère tout d'abord l'équation

$$(E_n) : z^n = 1$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Soit z une solution de (E_n).
   (a) Justifier que $|z| = 1$.
   (b) En déduire qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$.
   (c) Justifier qu'il existe $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que $z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
2. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_n) à l'aide de ω.
3. Dans cette question, on prend $n = 3$ et on pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Justifier que 1, j et j^2 sont les solutions de (E_3).
   (b) Placer les points A, B et C d'affixes respectives 1, j et j^2 dans le plan complexe.
   (c) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
4. On revient au cas général.
   (a) Développer et simplifier $S = (1-\omega)(1+\omega+\cdots+\omega^{n-1})$.
   (b) Que peut-on en déduire sur la somme $1+\omega+\cdots+\omega^{n-1}$.
   (c) Justifier que pour $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $\overline{\omega^k} = \omega^{n-k}$.
5. Dans cette question, on prend $n = 5$.
   (a) À l'aide des question 4b et 4c, montrer que $1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 0$.
   (b) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 2 (Des calculs !!).

1. Déterminer l'ensemble de dérivabilité puis dériver les fonctions :

   a) $a(x) = \dfrac{x^5}{5} - 4x^2 + \dfrac{2x}{3} - 3$ b) $b(x) = Ax^2 + Bx + C$ c) $c(x) = \dfrac{x+3}{1-2x}$

   d) $f(x) = \sin(3x) + \cos\left(\dfrac{x}{5}\right)$ e) $g(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$ f) $h(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$

   Dresser le tableau de variation complet de la fonction $c(x) = \dfrac{x+3}{1-2x}$.
2. Calculer les limites :

   a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^2-2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x+3}{x^2-4x+1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2}$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x+1}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Montrer que : $\dfrac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.