Devoir Surveillé 01

(durée : 2 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1. Les sept questions suivantes sont indépendantes.

1. Simplifier au maximum les fractions suivantes (où x et y sont des réels non nuls) :
$$A = \frac{3+\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{9}} \quad \text{et} \quad B = \frac{(xy^3)^{-1}x^2}{(x^{-1}y)^2}.$$
2. Dans chaque cas, comparer les deux nombres en justifiant :
   (a) $\frac{25}{7}$ et $\frac{32}{9}$
   (b) $3\sqrt{5}$ et $4\sqrt{3}$.
3. Résoudre les inéquations suivantes :
   (a) $x^3 < x^2$ (b) $\frac{1}{x} \geq 2x$ (c) $|x-1| \geq 2$ (d) $0 < \frac{1+x}{1-x} < 1$.
4. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$, puis représenter graphiquement cette inégalité.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1$.
6. (a) En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :
$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x) = 2.$$

Exercice 2. Pour tout réel m, on considère l'équation $(E_m) : (m-1)x^2 - 2(m-4)x + (2m+1) = 0$.
Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation (E_m) en fonction de m.
On fera attention au degré de (E_m) !

Exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = |x^2 - 2x - 8| + |x+2| + 2|x-1| - 6$.

1. Déterminer le signe de $(x+2)(x+4)$. On présentera le résultat sous forme de tableau.
2. Déterminer une expression simple de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, -2]$, $[-2, 1]$, $[1, 4]$ et $[4, +\infty[$.
3. Tracer l'allure du graphe de f.

Exercice 4. On considère l'équation d'inconnue $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:
$$\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1. \tag{E}$$
On va résoudre cette équation de deux façons différentes.

1. On donne l'égalité :
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$
   (a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à :
$$\sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)\right) = 0.$$
   (b) Justifier que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0$.
   (c) En déduire les solutions de (E).
2. (a) Montrer que pour tout $y \in]0, 1[$, $\sqrt{y} > y^2$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > 1$.
   (c) Retrouver les solutions de (E).

Exercice 5. 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $2x \leq x^2 + 1$.
2. En déduire que pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $8\sqrt{abc} \leq (a+1)(b+1)(c+1)$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left\lfloor \sqrt{n^2+n+1} \right\rfloor = n$.

Correction du Devoir Surveillé 01

Correction de l'exercice 1 :

1. $A = \dfrac{\frac{13}{3}}{\frac{13}{18}} = \dfrac{18}{3}$, donc $\boxed{A = 6}$ et $B = x^{-1}y^{-3}x^2x^2y^{-2}$, donc $\boxed{B = x^3y^{-5}}$.
2. $\dfrac{25}{7} - \dfrac{32}{9} = \dfrac{225-224}{63} > 0$, donc $\boxed{\dfrac{25}{7} > \dfrac{32}{9}}$.

   $(3\sqrt{5})^2 = 45$ et $(4\sqrt{3})^2 = 48$, donc $\boxed{4\sqrt{3} > 3\sqrt{5}}$.
3. (a) $x^3 < x^2 \iff x^2(x-1) < 0$ et on fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2(x-1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{]-\infty,0[\cup]0,1[}$.

   (b) $\dfrac{1}{x} \geq 2x \iff \dfrac{1-2x^2}{x} \geq 0 \iff \dfrac{(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)}{x} \geq 0$ et on fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\sqrt{2}x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+\sqrt{2}x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)}{x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

   L'ensemble des solutions est $\boxed{]-\infty,-1/\sqrt{2}]\cup]0,1/\sqrt{2}]}$.

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Il vérifie $|x-1| \geq 2$ ssi sa distance à 1 est supérieure ou égale à 2. Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[}$.

   (d) • On fait un tableau de signes pour $\dfrac{1+x}{1-x}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

   L'ensemble des solutions de $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ est $\boxed{]-1,1[}$.

   • $\dfrac{1+x}{1-x} < 1 \iff \dfrac{1+x}{1-x} - 1 < 0 \iff \dfrac{2x}{1-x} < 0$ et on fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

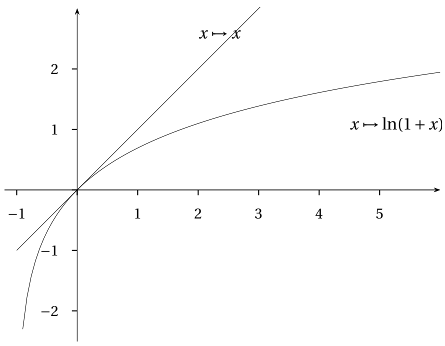
L'ensemble des solutions de $\dfrac{1+x}{1-x} < 1$ est $\boxed{]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[}$.

L'ensemble des solutions de $0 < \dfrac{1+x}{1-x} < 1$ est $\boxed{]-1,1[\cap(]-\infty,0[\cup]1,+\infty[) =]-1,0[}$.

4. On pose $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ qui est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.
   On obtient alors le tableau de variations :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout $x > -1$, $f(x) \geq 0$. Autrement dit, $\boxed{\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x}$.
Graphiquement, le graphe de $x \mapsto \ln(1+x)$ est au-dessous de la droite $y = x$ sur $]-1, +\infty[$:



5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, donc $2x - 2 < 2\lfloor x \rfloor \leq 2x$ et $-2x \leq -2\lfloor x \rfloor < 2 - 2x$.
   De plus, $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x$.
   En ajoutant les encadrements, on obtient : $-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2$. Comme $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ est un entier, on a $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0$ ou 1. Dans les deux cas, on a l'encadrement voulu.
   Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1}$.

6. (a) On applique les formules d'addition :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

d'où $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2},$$

d'où $\boxed{\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$.

(b)

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x)+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x)=2\\
\iff\ &\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos(x)+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin(x)=\frac{1}{2}\\
\iff\ &\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin(x)=\frac{1}{2}\\
\iff\ &\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\\
\iff\ &\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
\iff\ &x-\frac{\pi}{12}\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } x-\frac{\pi}{12}\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\\
\iff\ &x\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi] \text{ ou } x\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions est $\boxed{\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\equiv\frac{5\pi}{12}\ [2\pi] \text{ ou } x\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\right\}}$.

Correction de l'exercice 2 :

ATTENTION : l'équation n'est pas toujours de degré 2 ! Si $m=1$, (E_1) est une équation de degré 1, elle a donc une seule solution réelle. Si $m\neq 1$, on a bien une équation de degré 2. On calcule le discriminant : $\Delta=4(m-4)^2-4(m-1)(2m+1)=4m^2-32m+64-4(2m^2-m-1)=-4m^2-28m+68=4(-m^2-7m+17)$. On étudie le signe de Δ selon la valeur de m en calculant le discriminant du discriminant : $\Delta'=49+68=117$. Donc Δ s'annule pour $m=\frac{7\pm\sqrt{117}}{-2}=-\frac{7\pm3\sqrt{13}}{2}$.

m	$-\infty$		$-\frac{7+3\sqrt{13}}{2}$		$-\frac{7-3\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

On remarque que $3\sqrt{13}>3\sqrt{9}=9$, donc $-\frac{7-3\sqrt{13}}{2}>1$ et on distingue les cas :

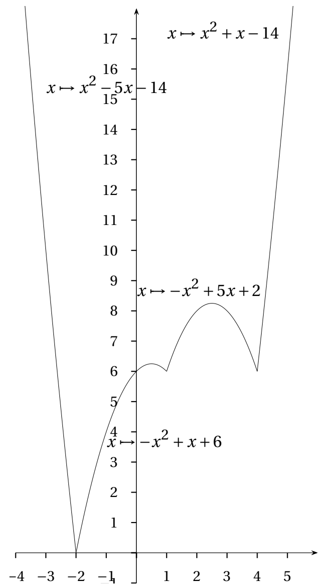
- si $m=1$, l'équation (E_m) a une seule solution réelle ;
- si $m\in\left]-\frac{7+3\sqrt{13}}{2},-\frac{7-3\sqrt{13}}{2}\right[$, l'équation (E_m) a deux solutions réelles ;
- si $m\in\left\{-\frac{7+3\sqrt{13}}{2},-\frac{7-3\sqrt{13}}{2}\right\}$, l'équation (E_m) a une seule solution réelle ;
- si $m\in\left]-\infty,-\frac{7+3\sqrt{13}}{2}\right[\cup\left]-\frac{7-3\sqrt{13}}{2},+\infty\right[$, l'équation (E_m) n'a pas de solution réelle.

Correction de l'exercice 3 :

1. On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$(x-4)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+2)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. On remarque que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(x+2)(x-4)=x^2-2x-8$.
   - Soit $x\in]-\infty,-2]$: d'après la question précédente, $x^2-2x-8\geq 0$ et $x+2\leq 0$. De plus, $x-1\leq 0$. Donc $f(x)=x^2-2x-8-(x+2)-2(x-1)-6=x^2-5x-14$.
   - Soit $x\in[-2,1]$: de même $f(x)=-(x^2-2x-8)+(x+2)-2(x-1)-6=-x^2+x+6$.
   - Soit $x\in[1,4]$: de même $f(x)=-(x^2-2x-8)+(x+2)+2(x-1)-6=-x^2+5x+2$.
   - Soit $x\in[4,+\infty[$: de même $f(x)=x^2-2x-8+x+2+2(x-1)-6=x^2+x-14$.
3. On doit tracer 4 morceaux de paraboles : pour cela on place d'abord les sommets, puis on place les points de raccord de ces paraboles et on joint pour que ça ressemble à des paraboles.



Correction de l'exercice 4 :

1. (a) On met l'équation (E) à la puissance 4 :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1\\
\iff &\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)}\right)^4 = 1\\
\iff &\cos^2(x) + 4\cos(x)\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 6\cos(x)\sin(x) + 4\sqrt{\cos(x)\sin(x)}\sin(x) + \sin^2(x) = 1\\
\iff &4\cos(x)\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 6(\sqrt{\cos(x)\sin(x)})^2 + 4\sin(x)\sqrt{\cos(x)\sin(x)} = 0\\
\iff &2\sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)\right) = 0\\
\iff &\sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)\right) = 0
\end{aligned}$$

(b) Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) > 0$. Donc $2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0$.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, 2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0}$.

(c) D'après la question précédente, les seules solutions possibles sont 0 et $\frac{\pi}{2}$. On vérifie que ces deux valeurs sont bien solutions. L'ensemble des solutions est : $\boxed{\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}}$.

2. (a) Soit $y \in]0,1[$. Comme la fonction $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ est strictement croissante : $y^{\frac{3}{2}} < 1$. En multipliant par $\sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} < \sqrt{y}$.

Ainsi, $\boxed{\forall y \in]0,1[, y^2 < \sqrt{y}}$.

(b) Comme pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) \in]0,1[$ et $\sin(x) \in]0,1[$, on applique la question précédente : $\sqrt{\cos(x)} > \cos^2(x)$ et $\sqrt{\sin(x)} > \sin^2(x)$. Donc

$$\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$$

(c) D'après la question précédente, les seules solutions possibles sont 0 et $\frac{\pi}{2}$. On vérifie encore que 0 et $\frac{\pi}{2}$ sont solutions.

Correction de l'exercice 5 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a $(x-1)^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 - 2x \geq 0$, d'où $\boxed{x^2 + 1 \geq 2x}$.
2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. On applique l'inégalité précédente pour $x = \sqrt{a}$:

$$2\sqrt{a} \leq a + 1.$$

De même, $2\sqrt{b} \leq b + 1$ et $2\sqrt{c} \leq c + 1$. Comme tout est positif, on obtient :

$$\boxed{8\sqrt{abc} \leq (a+1)(b+1)(c+1).}$$

Correction de l'exercice 6 :

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Comme la fonction racine carrée est strictement croissante, $n < \sqrt{n^2 + n + 1} < n + 1$. Par définition de la partie entière, on a $\boxed{n = \left\lfloor \sqrt{n^2 + n + 1} \right\rfloor}$.