Chapitre 2 : Trigonométrie et nombres complexes

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé canonique $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I. Rappels sur les vecteurs

Définition I.1. Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Il existe un unique couple de réels (x,y) tel que : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Ce sont les **coordonnées de** $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. On note alors $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Proposition I.1. *1. Soient $\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ deux vecteurs et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Alors $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\begin{pmatrix}\lambda a+\mu c\\\lambda b+\mu d\end{pmatrix}$.*

2. Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan. Alors $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

Définition I.2. Soit $\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. La **norme** de $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.
Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points du plan. La **distance** AB est : $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Proposition I.2. *Soit $\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.*

1. *$\|\vec{u}\|=0\iff\vec{u}=\vec{0}$;*
2. *$\|\lambda\vec{u}\|=|\lambda|\,\|\vec{u}\|$;*
3. *Si $\vec{u}\neq\vec{0}$, alors $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est de norme 1.*

II. Cercle trigonométrique

II.1. Mesures d'un angle orienté

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de rayon 1 centré en O.

Définition II.1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et A et B les deux points du cercle trigonométrique définis par $\overrightarrow{OA}=\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\overrightarrow{OB}=\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.
Une mesure α de **l'angle orienté** $(\vec{u},\vec{v})$, en radians, est donnée par la longueur d'un arc de cercle joignant A à B affectée du signe plus si on parcourt le cercle dans le sens anti-horaire, dit aussi **sens direct** et du signe moins sinon.

Lemme II.1. *Deux mesures α et α' du même angle d'un multiple de 2π. On écrit $\alpha\equiv\alpha'\ [2\pi]$, ce qui se lit « α est congru à α' modulo 2 pi » :*

$$\alpha\equiv\alpha'\ [2\pi]\iff\exists k\in\mathbb{Z},\alpha=\alpha'+k\times2\pi.$$

*Une seule mesure se trouve dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$. C'est la **mesure principale** de l'angle.*

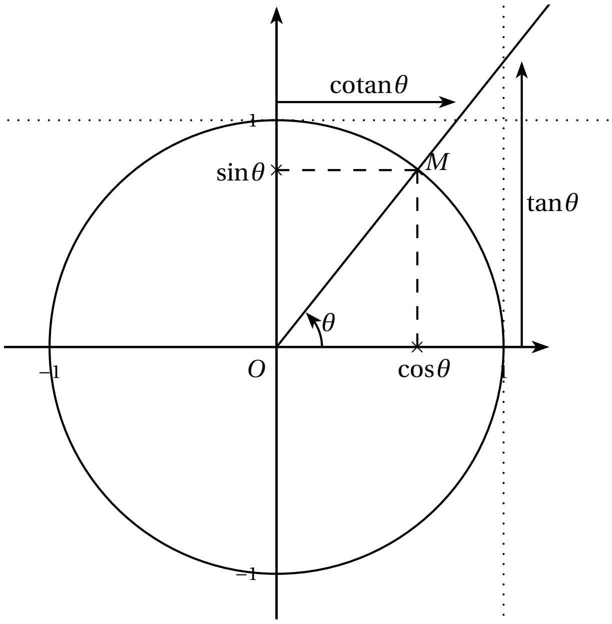
Proposition II.1. *Soient a,b,c et d quatre réels.*

1. *Symétrie : si $a\equiv b\ [2\pi]$ alors $b\equiv a\ [2\pi]$.*
2. *Reflexivité : $a\equiv a\ [2\pi]$.*
3. *Transitivité : si $a\equiv b\ [2\pi]$ et $b\equiv c\ [2\pi]$, alors $a\equiv c\ [2\pi]$.*
4. *Si $a\equiv b\ [2\pi]$ et $c\equiv d\ [2\pi]$ alors $a+c\equiv b+d\ [2\pi]$.*
5. *Si $a\equiv b\ [2\pi]$ alors $ac\equiv bc\ [2c\pi]$.*

II.2. Fonctions trigonométriques

Définition II.2. Soit θ un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

- Le **cosinus** de θ, noté $\cos(\theta)$ est l'abscisse de M.
- Le **sinus** de θ, noté $\sin(\theta)$ est l'ordonnée de M.
- Lorsque $\theta \not\equiv \pm\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, la **tangente** de θ, notée $\tan(\theta)$ est le quotient $\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.
- Lorsque $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, la **cotangente** de θ, notée $\mathrm{cotan}(\theta)$ est le quotient $\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

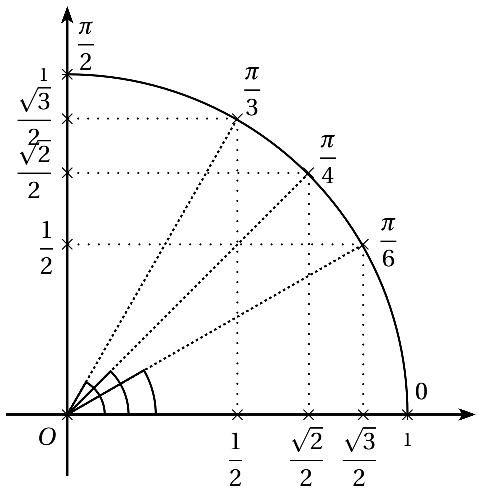


Proposition II.2. 1. *Pour tout réel* x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

2. *Les fonctions* $x \mapsto \cos(x)$ *et* $x \mapsto \sin(x)$ *sont définies et dérivables sur* $\mathbb{R}$. *La fonction* $x \mapsto \tan(x)$ *est définie et dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. *De plus,* $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$ *et* $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$.
3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

II.3. Valeurs usuelles et symétries

degré	0°	30°	45°	60°	90°
radian	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
cosinus	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
sinus	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
tangente	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéf



Proposition II.3. 1. *La fonction cosinus est paire et* 2π*-périodique, i.e.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x \text{ et } \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

2. *La fonction sinus est impaire et* 2π*-périodique, i.e.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

3. *La fonction tangente est impaire et* π*-périodique, i.e.*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \tan(-x) = -\tan x \text{ et } \tan(x + \pi) = \tan x.$$

4. *En utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos x \text{ et } \sin(\pi - x) = \sin x.$$

5. *En utilisant la symétrie par rapport à l'origine,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi + x) = -\cos x \text{ et } \sin(\pi + x) = -\sin x.$$

6. *En utilisant la symétrie par rapport à la droite $y = x$,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

Remarque II.1. Le dernier point de la proposition nous permet d'affirmer que la courbe représentative de la fonction sinus s'obtient en appliquant une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$ à celle de la fonction cosinus.

III. Formules trigonométriques

Proposition III.1 (Formules d'addition).

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a\\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a\\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b\\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}\\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}
\end{aligned}$$

Démonstration.

Pour les formules d'addition du cosinus et du sinus, on utilise le dessin ci-contre.
On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ de deux façons différentes :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \cos(b-a)$$

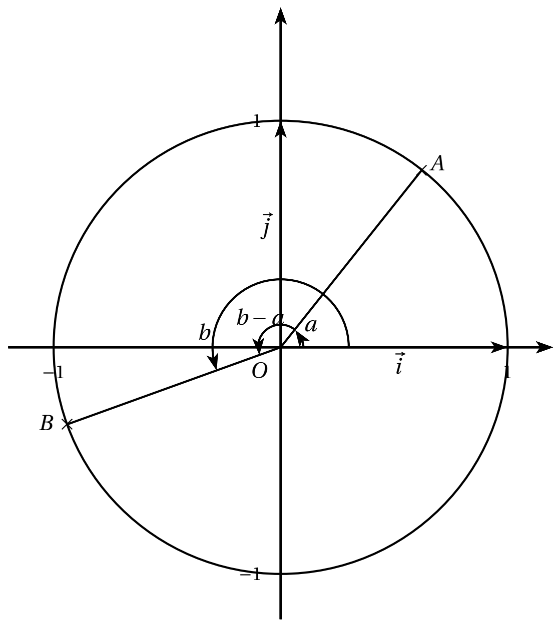
Et comme $\overrightarrow{OA} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}$ *et* $\overrightarrow{OB} = \cos(b)\vec{i} + \sin(b)\vec{j}$,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

On obtient ainsi $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
Puis,

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)\\
&= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).
\end{aligned}$$

On trouve ensuite les formules pour $\cos(a+b)$ *et* $\sin(a-b)$ *en remplaçant b par $-b$.*



□

À l'aide des formules d'addition, on démontre celles qui suivent.

Proposition III.2 (Formules de duplication).

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x \cos x\\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x\\
\tan 2x &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.
\end{aligned}$$

Proposition III.3 (Formules de linéarisation).

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}\\
&\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}\\
&2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)\\
&2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)\\
&2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)
\end{aligned}$$

Proposition III.4 (Formules de factorisation).

$$\begin{array}{l|l}
\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & \cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) & \cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{array}$$

IV. Équations et inéquations trigonométriques

Proposition IV.1. *Soient a et b deux réels.*

$$\begin{aligned}
&\cos a = \cos b \iff a \equiv b\ [2\pi] \text{ ou } a \equiv -b\ [2\pi]\\
&\sin a = \sin b \iff a \equiv b\ [2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b\ [2\pi]\\
&\tan a = \tan b \iff a \equiv b\ [\pi].
\end{aligned}$$

Remarque IV.1. Plutôt que d'apprendre par coeur la proposition précédente, on pourra se servir des symétries du cercle trigonométrique pour la retrouver.

V. $\mathbb{C}$

V.1. Forme algébrique

Définition V.1. $\mathbb{C}$ est l'ensemble des couples de réels (a,b) notés $a+ib$.
Si $z = a+ib$, la **partie réelle** de z est a, notée aussi $\mathrm{Re}(z)$. La **partie imaginaire** de z est b, notée aussi $\mathrm{Im}(z)$.
L'écriture $z = a+ib$ s'appelle la **forme algébrique** de z.
Lorsque $a = 0$, on dit que z est un **imaginaire pur**.

Proposition V.1. *Soient z et z' deux complexes.*

1. $z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0$ *et* $\mathrm{Im}(z) = 0$ *;*
2. $z = z' \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$ *;*
3. *L'ensemble* $\mathbb{C}$ *contient* $\mathbb{R} = \{a + i0, a \in \mathbb{R}\}$*, et* $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0$ *;*
4. *L'ensemble* $\mathbb{C}$ *contient* $i\mathbb{R} = \{0 + ib, b \in \mathbb{R}\}$*, et* $z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations $+$ et $\times$ définies par :

- $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$;
- $(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$.

Remarques V.1.

- Les opérations ainsi définies suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$: on dit de $\mathbb{C}$ qu'il est un **corps**.
- Le nombre complexe $i = 0 + i1$ vérifie $i^2 = -1$.
- $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$, avec $z, z' \in \mathbb{C}$.
- $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.

V.2. Conjugaison

Définition V.2. Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on définit son conjugué $\overline{z} = a - ib \in \mathbb{C}$.

Proposition V.2. *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,*

- $\overline{\overline{z}} = z$;
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ *et* $\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$;
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$;
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$;
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

Méthode. Pour déterminer la forme algébrique du complexe $\frac{1}{z}$, on utilise le conjugué : $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$. Le dénominateur est un nombre réel car $\overline{z\overline{z}} = \overline{z}z = z\overline{z}$.

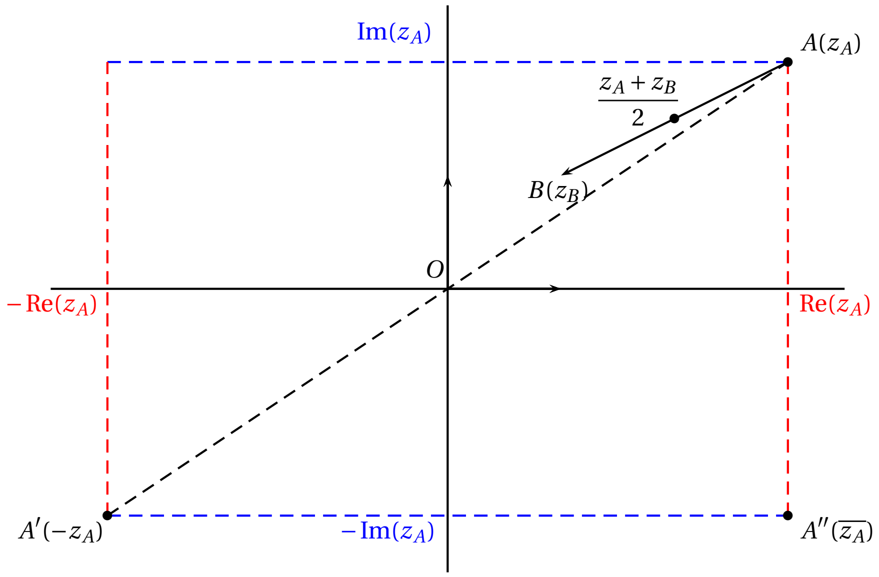
V.3. Le plan complexe

Définition V.3.
- Au nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point M du plan de coordonnées (a, b). Il est appelé l'**image** de z et est noté $M(z)$.
- Inversement, au point M (ou au vecteur $\vec{u}$) de coordonnées (a, b) on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$. On dit que $z = a + ib$ est **l'affixe** du point M (ou du vecteur $\vec{u}$).

La droite passant par O et dirigée par $\vec{i}$ (respectivement par $\vec{j}$) est l'**axe des réels** (respectivement l'**axe des imaginaires purs**).

Proposition V.3. *Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe et $\vec{u}$, $\vec{v}$ d'affixes respectives z et z'.*

1. *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, l'affixe de $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ est $\lambda z + \mu z'$;*
2. *L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$;*
3. *Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$;*
4. *Le symétrique de A par la symétrie de centre O a pour affixe $-z_A$;*
5. *Le symétrique de A par rapport à l'axe des réels a pour affixe $\overline{z_A}$;*



Remarque V.2. Soit $w \in \mathbb{C}$. L'application $z \in \mathbb{C} \mapsto z + w \in \mathbb{C}$ s'interprète géométriquement comme la translation du vecteur d'affixe w.

VI. Forme trigonométrique

VI.1. Module

Définition VI.1. Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on pose $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. C'est la distance entre l'origine du plan complexe et le point d'affixe z.

Remarque VI.1.
- Lorsque z est réel, $|z|$ est sa valeur absolue (car $\sqrt{a^2} = |a|$).
- Si A et B sont deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B, alors $|z_B - z_A|$ est la distance AB.

Proposition VI.1. *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,*
- $|z| = 0 \iff z = 0$;
- $|z| = |\overline{z}|$;
- $|z|^2 = z\overline{z}$;
- $|zz'| = |z||z'|$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ *et* $\forall n \in \mathbb{Z}, \left|z^n\right| = |z|^n$;
- $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$ *avec égalité ssi* $z \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$ *avec égalité ssi* $z \in i\mathbb{R}_+$;
- ***Inégalité triangulaire :*** $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *avec égalité si et seulement si* $z' = 0$ *ou* $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$.
- $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$.

Remarque VI.2. Géométriquement, l'inégalité triangulaire signifie que la longueur d'un côté d'un triangle est toujours plus petite que la somme des longueurs des deux autres côtés. Faire un dessin pour s'en convaincre.

Définition VI.2. Soient A un point du plan complexe d'affixe a et R un nombre réel positif.
1. Le **disque fermé** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que $|z - a| \leq R$.
2. Le **disque ouvert** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que $|z - a| < R$.
3. Le **cercle** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que $|z - a| = R$.

VI.2. Cercle unité

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Dans le plan complexe, c'est le cercle centré en 0 et de rayon 1.

Proposition VI.2. *Soit $z \in \mathbb{U}$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.*
De plus, si $\theta' \in \mathbb{R}$ vérifie aussi $z = \cos(\theta') + i\sin(\theta')$, alors $\theta' \equiv \theta\,[2\pi]$.

Remarque VI.3. Si M est le point image de z dans le plan complexe, un tel θ est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Notation VI.1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Ainsi, $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Proposition VI.3. *Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.*

- $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$;
- $\mathrm{e}^{i(\theta+\varphi)} = \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\varphi}$ *et* $\mathrm{e}^{in\theta} = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n$;
- ***Formules d'Euler :***
  $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ *et* $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$;
- $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\varphi} \iff \theta \equiv \varphi\ [2\pi]$

VI.3. Argument et forme trigonométrique

Définition VI.3. Soit z un nombre complexe **non nul** et M son point image dans le plan complexe.
On appelle **argument** de z toute mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$: $\arg(z) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$.

Remarque VI.4. On peut repérer n'importe quel point M du plan différent de l'origine à l'aide de deux nombres (r, θ) : r est la distance OM et θ est la mesure principale de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. On dit que (r, θ) sont les **coordonnées polaires** de M.

Proposition VI.4. *Soit z un nombre complexe non nul.*
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$;
- $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Théorème VI.5

*Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Alors $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** de z.*

Corollaire VI.6. *Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.*

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]. \end{cases}$$

Méthode. Pour passer de la forme algébrique $z = a + ib$ à la forme trigonométrique, on commence par calculer $|z|$, puis on a $\cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|}$ à résoudre.

Proposition VI.7. *Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et $n \in \mathbb{Z}$.*
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;
- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$;
- $\arg\left(z^n\right) \equiv n \arg(z)\ [2\pi]$.

Remarque VI.5. Soit $w = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$. L'application $z \in \mathbb{C} \mapsto zw \in \mathbb{C}$ s'interprète géométriquement comme l'homothétie de rapport r suivie de la rotation d'angle θ centrée en O.

VI.4. Factorisation par l'angle moitié

Pour trouver le module et l'argument d'une somme de deux nombres de module 1, on factorise par l'angle moitié :

Proposition VI.8. *Soient $p, q \in \mathbb{R}$, on factorise*

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{ip} + \mathrm{e}^{iq} &= \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}} \left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{p-q}{2}} \right) \\ &= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}} \\ \mathrm{e}^{ip} - \mathrm{e}^{iq} &= \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}} \left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}} - \mathrm{e}^{-i\frac{p-q}{2}} \right) \\ &= 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}. \end{aligned}$$

En particulier si $\theta \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{e}^{i\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 - \mathrm{e}^{i\theta} = -2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.

Remarque VI.6. Cela permet de retrouver les formules pour $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$.

VI.5. Amplitude et phase d'une somme de sinusoïdes

Proposition VI.9. *Soient a et b deux réels. Il existe $A \geq 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varphi).$$

Méthode. Si $a = b = 0$, on prend $A = 0$ et c'est fini.
Si a ou b est non nul, pour trouver A et φ comme dans la proposition, on pose $z = a + ib$. Comme $z \neq 0$, il admet une forme trigonométrique $z = a + ib = |z|\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, c'est-à-dire $a = |z|\cos(\varphi)$ et $b = |z|\sin(\varphi)$. On obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$a\cos(t) + b\sin(t) = |z|(\cos(\varphi)\cos(t) + \sin(\varphi)\sin(t)) = |z|\cos(t - \varphi).$$

VI.6. Exponentielle complexe

Définition VI.4. On définit l'**exponentielle complexe** d'un nombre complexe $z = a + ib$ par $\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{ib}$.

Remarques VI.7.
- Cette fonction prolonge sur $\mathbb{C}$ la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.
- Attention, il n'y a pas de logarithme complexe (en tout cas pour nous).

Proposition VI.10. *Soient z et z' deux nombres complexes et $n \in \mathbb{Z}$.*

- $\mathrm{e}^z \neq 0$;
- $\mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}$;
- $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'}$;
- $\mathrm{e}^{z-z'} = \dfrac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^{z'}}$;
- $(\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}$.
- $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff z \equiv z'\ [2i\pi]$.