Outils pour l'étude de fonctions - Exercices

I. Propriétés générales des fonctions

Exercice I.1. 1. Tracer le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,4]$. Tracer ensuite les graphes des fonctions $f(x)+2$, $f(x+2)$, $f(2x)$ et $2f(x)$.

2. Tracer sur $[-3,5]$ le graphe de la fonction f qui est 1-périodique et telle que : $\forall x \in [-1/2, 1/2], f(x) = |x|$.
3. Tracer sur $[-3,5]$ le graphe de la fonction g qui est 2-périodique et telle que : $\forall x \in [-1,1], g(x) = x^2$.
4. Tracer sur $[-3,3]$ le graphe de la fonction h qui est 1-périodique et telle que : $\forall x \in [0,1[, h(x) = x$.

Exercice I.2. 1. Pour chaque couple de fonctions f et g, déterminer les ensembles de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$ et les calculer :

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$; (b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; (c) $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = \ln(x)$

2. Dans les exemples suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$:

(a) $h(x) = \sqrt{3x-1}$; (b) $h(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$; (c) $h(x) = \dfrac{1}{x+7}$; (d) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$; (e) $h(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$

Exercice I.3. Les fonctions suivantes sont-elles majorées ? minorées ? bornées ?

1. $f : x \mapsto \sin(x)\,\mathrm{e}^x$
2. $g : x \mapsto \dfrac{2\cos(x) + 2\sin(x)}{1 + \mathrm{e}^x}$.

Exercice I.4. Soient $f, g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.

1. Montrer que si f et g sont monotones (resp. strictement monotones) de même monotonie alors $f+g$ est aussi monotone (resp. strictement monotone) de même monotonie.
2. Montrer que si f et g sont monotones de même monotonie et positives alors fg est aussi monotone de même monotonie. Donner un contre-exemple lorsque les deux fonctions ne sont pas positives.
3. Montrer que si f et g sont monotones (resp. strictement monotones) de même monotonie alors $f \circ g$ est croissante (resp. strictement croissante).
4. Montrer que si f et g sont monotones (resp. strictement monotones) de monotonies contraires alors $f \circ g$ est décroissante (resp. strictement décroissante).

Exercice I.5. 1. Montrer que si f et g sont bornées, alors $f+g$ et fg sont bornées.

2. Si f et g sont deux fonctions majorées, fg est-elle majorée ?

Exercice I.6. 1. Soit f une fonction paire sur $\mathbb{R}$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

2. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $g : t \mapsto \sin(\omega t)$ est périodique et déterminer sa période en fonction de ω.

Exercice I.7. Montrer qu'une fonction périodique et monotone sur $\mathbb{R}$ est constante.

II. Calculs de dérivées

Exercice II.1. Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de dérivabilité :

1. $f_1(x) = x^{\mathrm{e}}$
2. $f_2(t) = (at-1)\sin(7t+2)$
3. $f_3(u) = \dfrac{u}{u^2 - \tau^2}$
4. $f_4(t) = \pi^t$
5. $f_5(x) = \sin^4 x$
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 4}$
7. $f_7(t) = \ln\big((2t+1)(t^2+1)\big)$
8. $f_8(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 1}$
9. $f_9(t) = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$
10. $f_{10}(x) = \tan(\cos(x))$
11. $f_{11}(x) = |x+1|^{\frac{1}{3}}$
12. $f_{12}(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}}$

Exercice II.2. 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x-2}$, où a, b et c sont 3 réels. Déterminer a, b et c pour que $\mathscr{C}_f$ ait les propriétés suivantes :

- $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0,5)$;
- la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses ;
- la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3.

2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions $g_\lambda : x \mapsto \dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$.

(a) Montrer que les tangentes en 0 aux courbes des fonctions g_λ sont parallèles entre elles.

(b) Démontrer que les tangentes en 1 aux courbes des fonctions g_λ sont concourantes.

III. Limites

Exercice III.1. Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x}$ | b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ | c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ | d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ | e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{x}$

Exercice III.2. Pour chaque fonction f, vérifier que la droite d'équation donnée est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$:

1. $f(x) = \dfrac{-x^2+6x-5}{x-2}$, $y = -x+4$ en $\pm\infty$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+3}$, $y = x+2$ en $+\infty$
3. $f(x) = 3x+1+\dfrac{\sin(5x)}{2x}$, $y = 3x+1$ en $+\infty$

IV. Bijections

Exercice IV.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. En déduire une propriété géométrique de la courbe représentative de f.

Exercice IV.2. Montrer que les fonctions suivantes définissent une bijection de leur ensemble de définition sur un ensemble à préciser, et écrire les fonctions réciproques :

1. $f_1(x) = 3x-5$
2. $f_2(x) = \sqrt{3}-x$
3. $f_3(x) = x^2-1$ sur $]-\infty, 0]$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{3x-2}$
5. $f_5(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$

Exercice IV.3. Soit $f : x \mapsto x^3+x+1$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(3)$.
3. Justifier que f^{-1} est croissante.

V. Fonctions usuelles

Exercice V.1. 1. Simplifier les expressions suivantes :

a) $e^2 \times e^3 \times \dfrac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3}$
b) $(e^{x-2})^2$
c) $\ln\sqrt{e}$
d) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$
e) $2\ln(e^3)$
f) $e^{3\ln(x)}$
g) $\ln\left(\dfrac{1}{e^x}\right)$
h) $e^{\frac{1}{2}\ln x}$
i) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{-2x}}\right)$
j) $\ln\left(\dfrac{1}{5}e^x\right)$
k) $\ln\sqrt{e^x}$
l) $\ln(e^2)+\ln\left(\dfrac{1}{e^4}\right)$
m) $\ln(2-\sqrt{3})+\ln(2+\sqrt{3})$
n) $4\ln\left(\dfrac{27}{\sqrt{12}}\right)-2\ln\left(\dfrac{\sqrt{18}}{16}\right)$
o) $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$
p) $\log_x(\log_x x^{x^y})$.

2. Résoudre les équations :

a) $\ln(x+11) = \ln(x+2)+\ln(x+3)$;
b) $e^{x-3}\cdot e^{2x+4} = e^5$;
c) $(e^{2x}-3)(e^{-x}+1) = 0$;
d) $e^{2x}-2e^x-3 = 0$;
e) $2^{x^3} = 3^{x^2}$;
f) $\operatorname{ch}(x) = 2$;
g) $4\operatorname{ch}(x)+2\operatorname{sh}(x)-4 = 0$.

Exercice V.2. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f suivantes, puis déterminer une fonction u et un réel α tels que $f(x) = (u(x))^\alpha$.

1. $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^3$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^5}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$
6. $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x^3}}}$.

Exercice V.3. 1. Montrer que pour tout réels x et y, on a : $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$.

2. Montrer que pour tout réels x et y, on a : $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)$.
3. Pour tout réel x, on pose $t = \mathrm{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Montrer que :

   (a) $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$;
   (b) $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$;
   (c) $\mathrm{th}(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Exercice V.4. Démontrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note argsh sa réciproque. Déterminer une expression de $\mathrm{argsh}(x)$ en fonction de x.

Exercice V.5. 1. a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\ln x \leq x - 1$.

   b) En substituant x par $\sqrt{x}$ dans l'inégalité précédente, démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x \geq x + 1$.

   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1$, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{sh}(x) \geq x$.

Exercice V.6. Étudier la limite en a de la fonction f pour :

a) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{x+2}{x\ln x + \sqrt{x}}$

b) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x - 3}$

c) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$

d) $a = 0^+$ et $f(x) = x^2 \ln(2x)$

e) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

f) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{x - \mathrm{e}^x}{x+1}$

g) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{x-1}{2x - (\ln x)^2}$

h) $a = +\infty$ et $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

i) $a = -\infty$ et $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x} - x$

j) $a = x_0 > 0$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$

k) $a = 4$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3}$

l) $a = 0$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1}$

m) $a = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{\ln(x + \mathrm{e}^x)}{x}$

n) $a = +\infty$ et $f(x) = (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$

o) $a = 1^+$ et $f(x) = \ln(x)\ln(\ln(x))$

Exercice V.7. Soit $f : t \mapsto \dfrac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice V.8. Soit f définie par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f et préciser les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.
2. (a) Démontrer que $f'(x) = f(x)g(x)$ avec $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + \dfrac{1}{x-1}$.

   (b) Étudier les limites en $\pm\infty$ de g, ses variations. En déduire son signe.

   (c) En déduire les variations de f

Exercice V.9. Calculer :

a) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
b) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
c) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
d) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
e) $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$
f) $\arctan(-1)$
g) $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$
h) $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
i) $\sin\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$
j) $\arccos\left(\cos\left(4\pi\right)\right)$
k) $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
l) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
m) $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)$
n) $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)$
o) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$
p) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)\right)$.

Exercice V.10. Calculer les dérivées des expressions suivantes, en précisant leurs domaines de définition :

a) $\arcsin\left(\sqrt{x}\right)$
b) $\arcsin\dfrac{x}{3}$
c) $x^2\arctan x^2$
d) $\arctan\left(\sin(2x)\right)$
e) $\ln\left(\arctan(x^2)\right)$
f) $\arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
g) $\arccos\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Exercice V.11. Étudier les fonctions suivantes puis tracer leurs courbes représentatives :
1. $f(x) = \arcsin(\sin x)$; 2. $g(x) = \arccos(\cos x)$; 3. $h(x) = \arctan(\tan x)$.

Exercice V.12.

1. On veut démontrer que pour tout x dans $[-1,1]$, $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Montrer le résultat en étudiant la fonction $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.
   (b) Montrer le résultat en posant $x = \sin\theta$ pour un certain θ.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$ (resp. $x < 0$), $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ (resp. $-\dfrac{\pi}{2}$).
3. Montrer la relation suivante sur un intervalle à préciser : $2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice V.13.

1. (a) Sur quel intervalle I est définie la fonction $x \mapsto \sin(\arccos x)$?
   (b) Montrer que pour tout $x \in I$, on a $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. (a) Sur quel ensemble $\mathscr{D}$ la fonction $x \mapsto \tan(\arccos x)$ est-elle définie ?
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ et $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. Résoudre l'équation $\arccos x = \arccos\dfrac{1}{2} + \arcsin\dfrac{1}{3}$.

Exercice V.14. Résoudre les équations :

a) $\arctan x + \arctan 2x = \dfrac{\pi}{4}$
b) $2\arctan x + \arccos\left(\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
c) *** $\arcsin 2x = \arcsin x + \arcsin\left(x\sqrt{2}\right)$
d) $\arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2} = \dfrac{\pi}{2}$

VI. Études de fonctions

Exercice VI.1. Étudier, puis tracer le graphe des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{x}$
2. $f_2(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
3. $f_3(x) = \sqrt{\cos x}$
4. $f_4(x) = x\ln(x)$
5. $f_5(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$
6. $f_6(x) = \left|2x^2 - 6x + \dfrac{11}{8}\right|$