Calculs de limites

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soient $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
On ne donne pas pour l'instant de définition mathématique précise de limite. On dira qu'une fonction f a pour limite ℓ lorsque x tend vers a et on écrira $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si « $f(x)$ se rapproche de ℓ lorsque x se rapproche de a ».

Opérations sur les limites

On prend d'abord $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Limite d'une somme

$\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim (f+g)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

$\lim f$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim (f \times g)$	$\ell \times \ell'$	$*\infty$	$*\infty$	FI

Limite d'un quotient

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$0^{\pm}$	ℓ'	$\pm\infty$	0
$\lim \left(\dfrac{f}{g}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$*\infty$	$*\infty$	FI	FI

Proposition 1. *Soient a, b et ℓ des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = \ell$.*

Théorème de comparaison

Théorème 2

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Si pour x proche de a	*et lorsque x tend vers a*	*alors*
$u(x) \leq f(x)$	$u(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$	$f \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$
$f(x) \leq u(x)$	$u(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$	$f \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$
$\lvert f(x) - \ell \rvert \leq u(x)$	$u(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$	$f \xrightarrow[x\to a]{} \ell$
$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$	$u(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ *et* $v(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$	$f \xrightarrow[x\to a]{} \ell$
$f(x) \leq g(x)$	*f et g ont des limites*	$\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Méthode : lever une indétermination

On dispose de plusieurs méthodes pour lever une forme indéterminée :

1. lorsque $x \to \pm\infty$: mettre en facteur le terme qui va le plus vite vers $+\infty$;
2. lorsque $x \to a$: factoriser par $x - a$;
3. utiliser les croissances comparées ;
4. encadrer l'expression par deux expressions plus simples ;
5. reconnaître un taux d'accroissement ;
6. utiliser la quantité conjuguée lorsqu'il y a des racines.
7. Autres outils au deuxième semestre :
   - équivalents ;
   - développements limités.