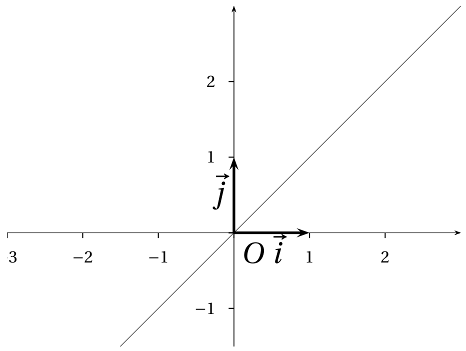
Fonctions usuelles : bestiaire

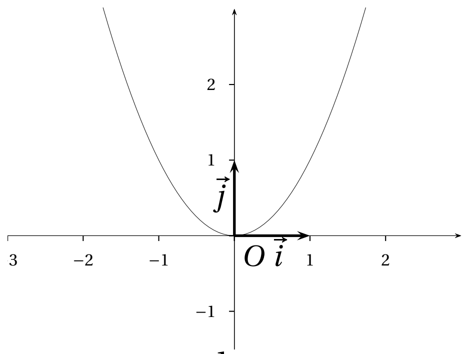
I. Fonctions puissances entières

I.1. Allure des courbes

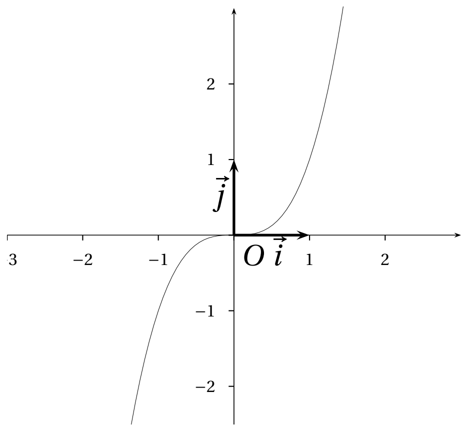
Fonction identité : $x \longmapsto x$
Domaine de définition : $\mathbb{R}$.



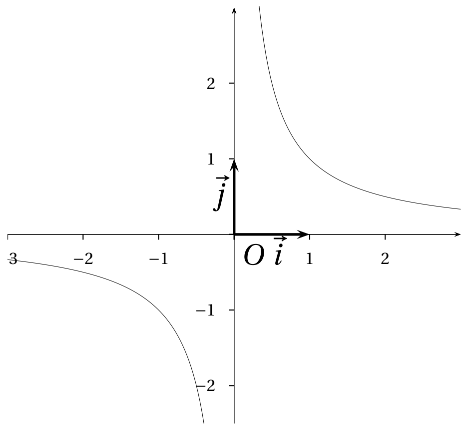
Fonction carrée : $x \longmapsto x^2$
Domaine de définition : $\mathbb{R}$.



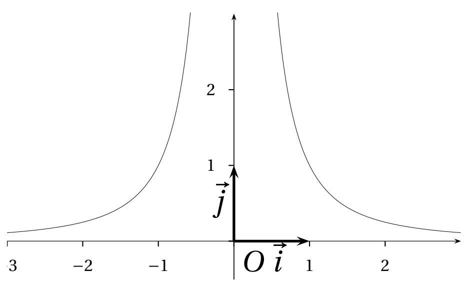
Fonction cube : $x \longmapsto x^3$
Domaine de définition $\mathbb{R}$.



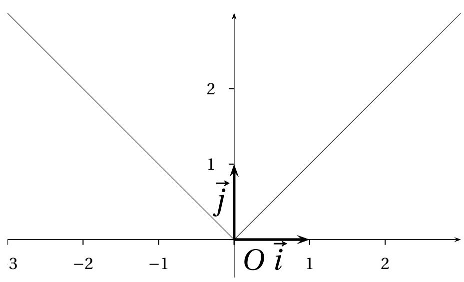
Fonction inverse : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
Domaine de définition $\mathbb{R}^*$.



Fonction inverse au carré : $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$
Domaine de définition $\mathbb{R}^*$.



Fonction valeur absolue : $x \longmapsto |x|$
Domaine de définition $\mathbb{R}$.



I.2. Positions relatives

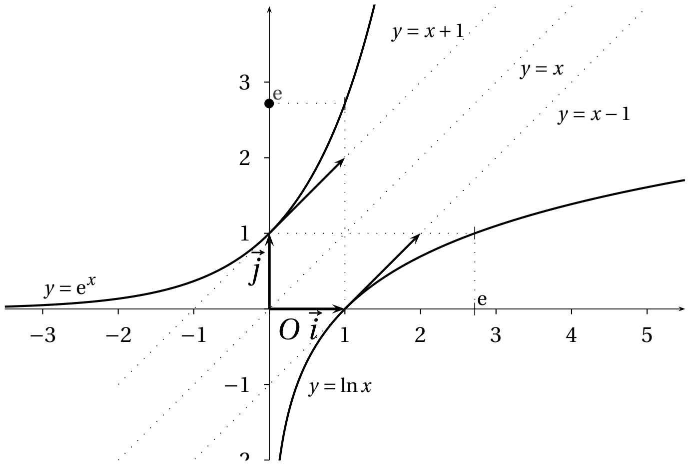
Pour tout $x \in]0,1]$ on a $0 \leq \cdots \leq x^4 \leq x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1 \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^3} \leq \cdots$

Pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a $0 \leq \cdots \leq \dfrac{1}{x^3} \leq \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{x} \leq 1 \leq x \leq x \leq x^2 \leq \cdots$

II. Fonctions exponentielle, logarithme, puissances quelconques

II.1. Fonctions exponentielle et logarithme

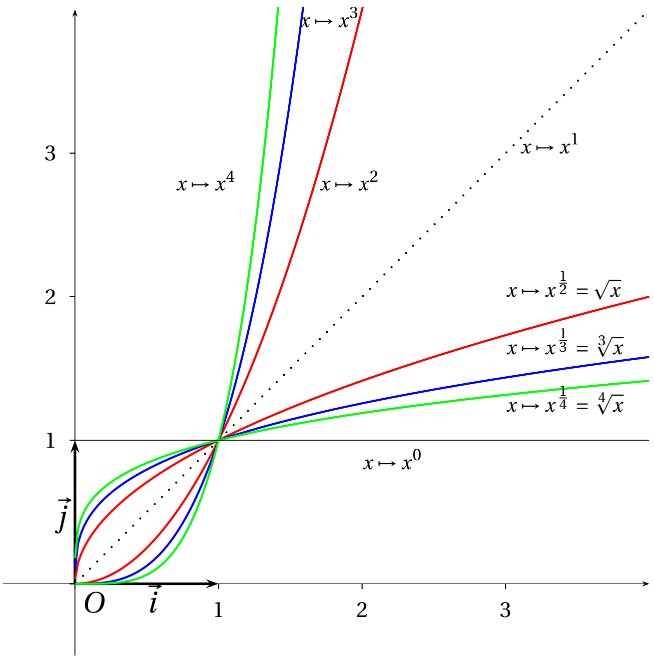
Domaine de définition de $x \mapsto \mathrm{e}^x$: $\mathbb{R}$.
Domaine de définition de $x \mapsto \ln x$: $\mathbb{R}_*^+$.



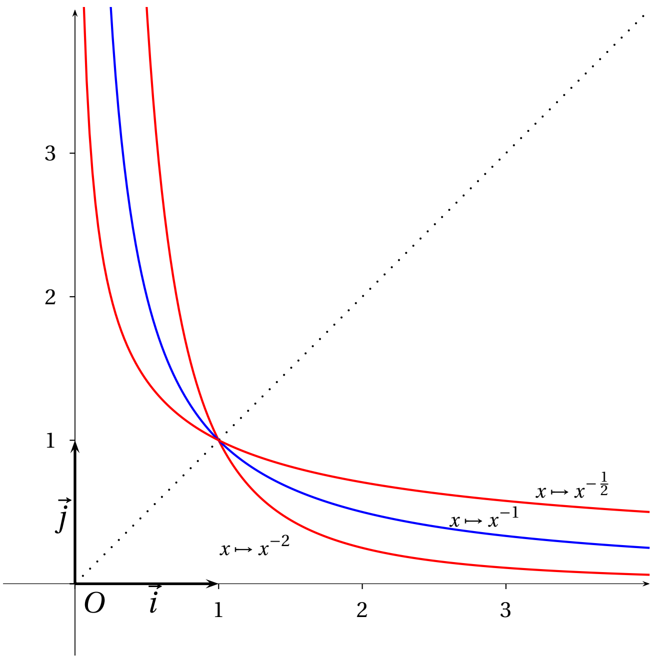
II.2. Fonctions puissances

Domaine de définition de $x \mapsto x^\alpha$ en général : $\mathbb{R}^+$ si $\alpha \geq 0$ et $\mathbb{R}_*^+$ si $\alpha < 0$.

$\alpha \geq 0$

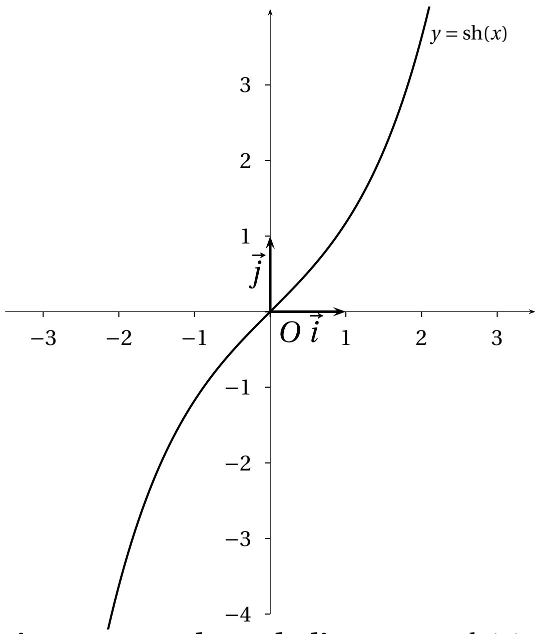


$\alpha < 0$

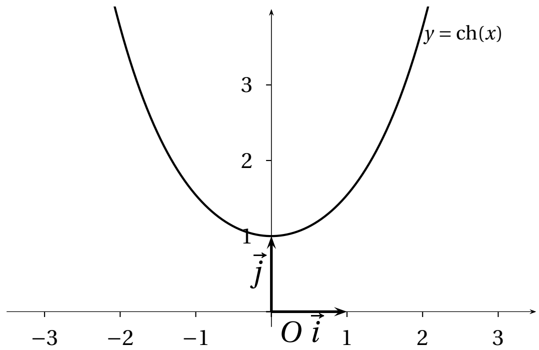


III. Fonctions hyperboliques

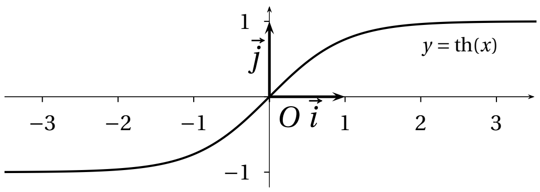
Fonction sinus hyperbolique : $x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$
Domaine de définition : $\mathbb{R}$.



Fonction cosinus hyperbolique : $x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$
Domaine de définition : $\mathbb{R}$.

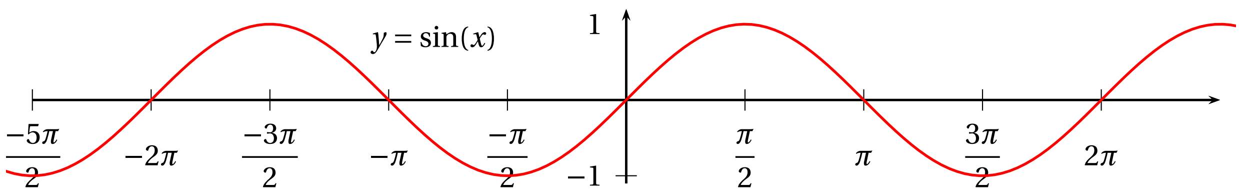


Fonction tangente hyperbolique : $x \longmapsto \mathrm{th}(x)$
Domaine de définition : $\mathbb{R}$.

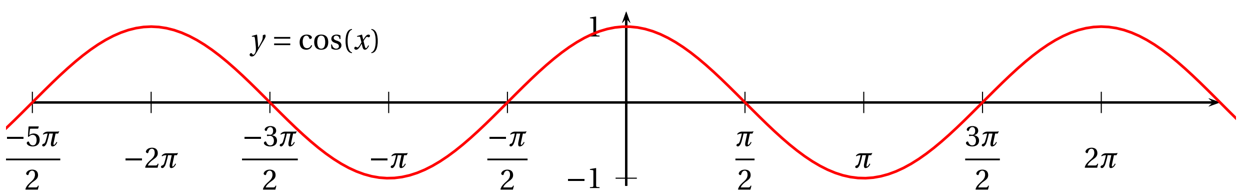


IV. Fonctions trigonométriques

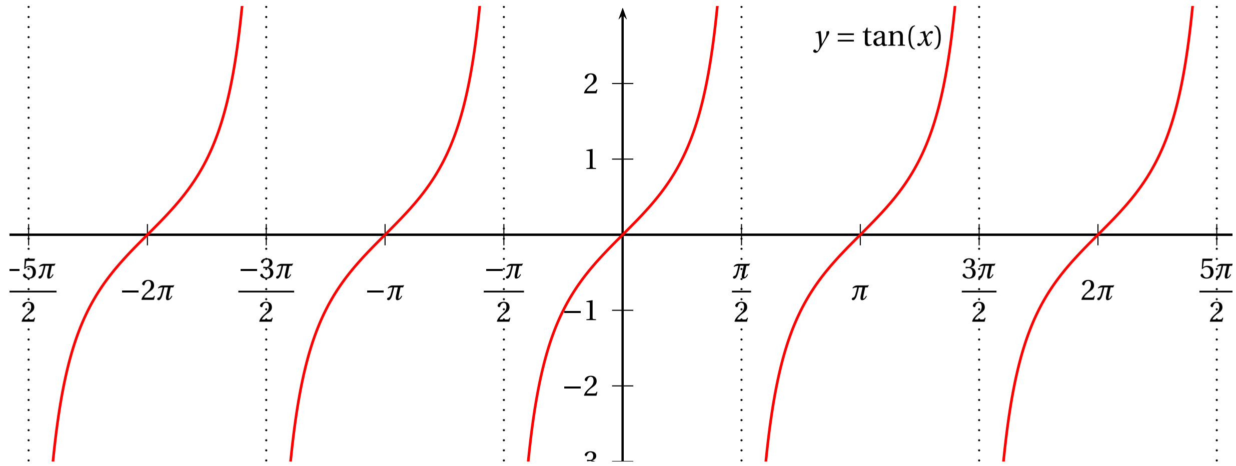
Fonction sinus : $x \longmapsto \sin(x)$
Domaine de définition : $\mathbb{R}$.



Fonction cosinus : $x \longmapsto \cos(x)$
Domaine de définition : $\mathbb{R}$.

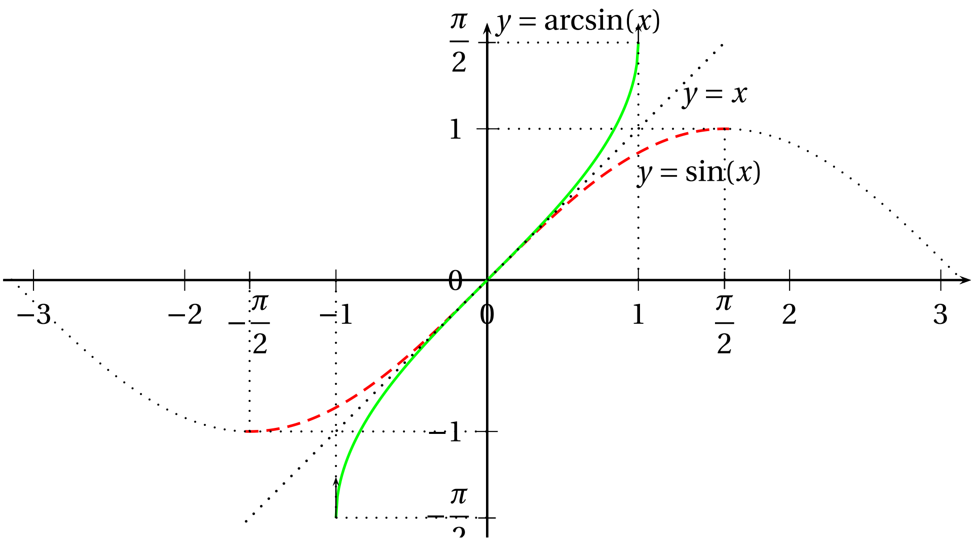


Fonction tangente : $x \longmapsto \tan(x)$
Domaine de définition : $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.



V. Fonctions circulaires réciproques

V.1. Fonctions sinus et arcsinus

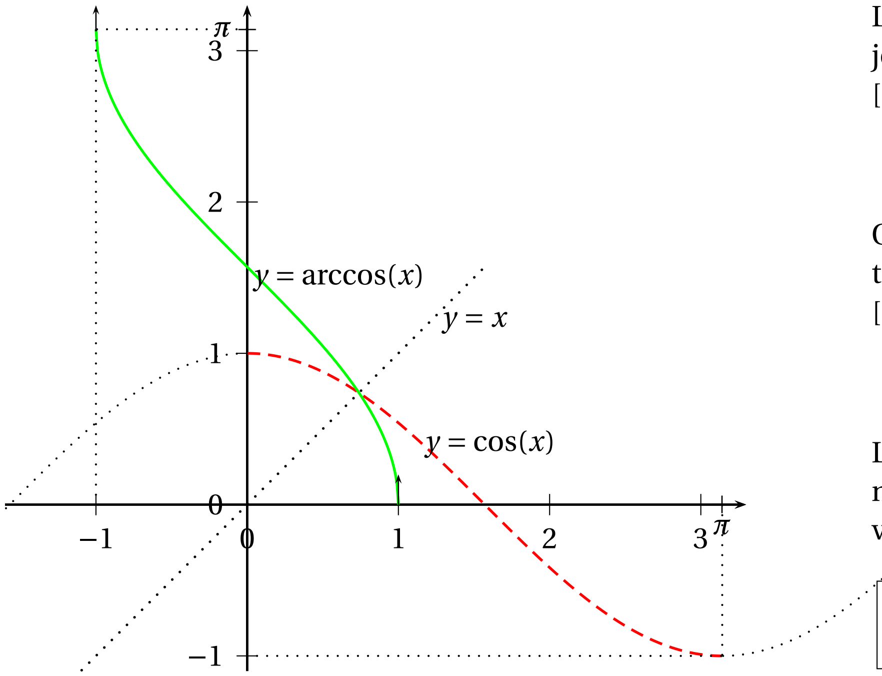


La fonction sinus est une bijection str. croissante de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$, $\boxed{\sin : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]}$.

On appelle fonction arcsinus sa fonction réciproque : $\boxed{\arcsin : [-1,1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]}$.

La fonction arcsinus est continue sur $[-1,1]$, impaire, **mais** elle n'est dérivable que sur $]-1,1[$, et on a $\boxed{\forall x \in]-1,1[, \arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

V.2. Fonctions cosinus et arccosinus



La fonction cosinus réalise une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$:

$$\boxed{\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]}$$

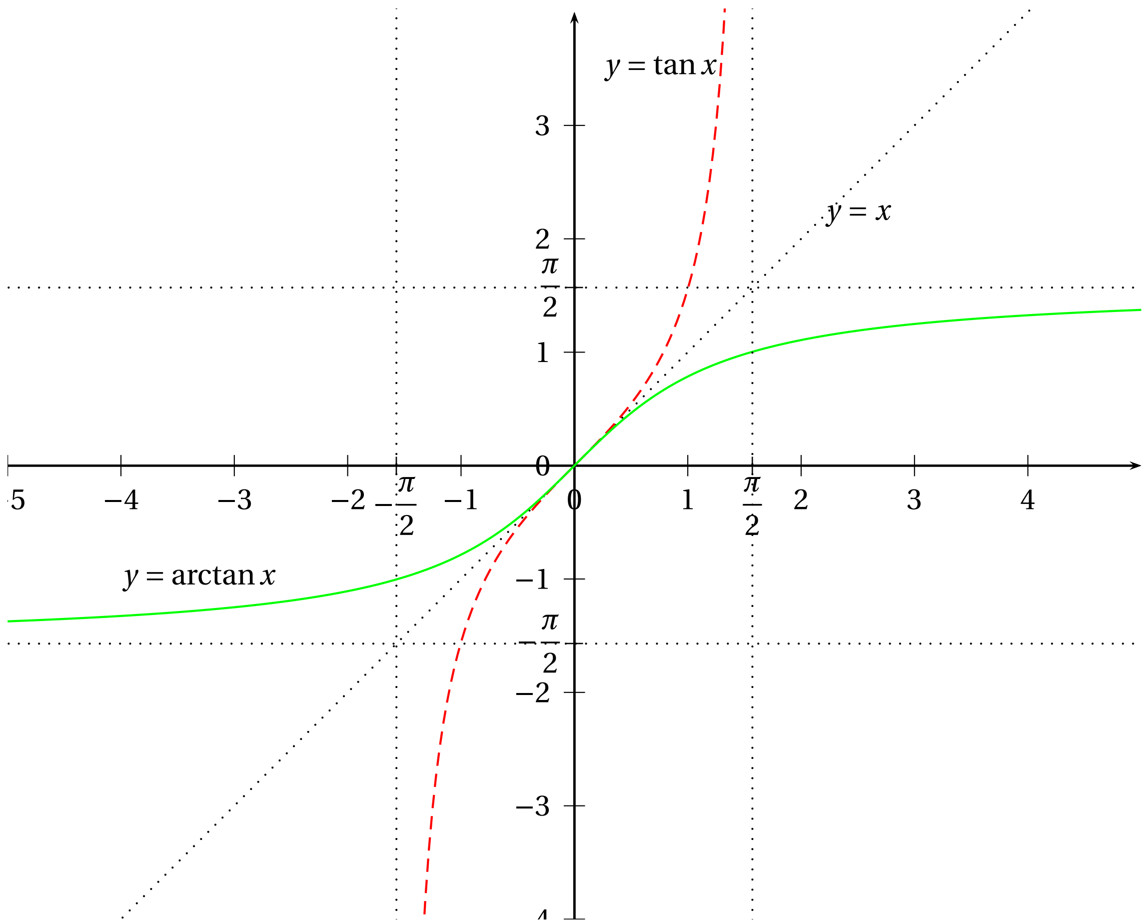
On appelle arccosinus sa fonction réciproque, donc définie sur $[-1, 1]$:

$$\boxed{\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]}$$

La fonction arccosinus est continue sur $[-1, 1]$ **mais** elle n'est dérivable que sur $]-1, 1[$, et on a

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

V.3. Fonctions tangente et arctangente



La fonction tangente réalise une bijection str. croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}}$.

On appelle fonction arctangente sa fonction réciproque, $\boxed{\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$.

La fonction arctangente est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, impaire, et : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}}$.

On a les limites :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$

donc la courbe représentative de la fonction arctangente a des asymptotes horizontales $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$.