

Exponentielles

Calcul 7.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

- | | | | |
|---------------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $e^{3 \ln 2}$ | <input type="text"/> | d) $e^{-2 \ln 3}$ | <input type="text"/> |
| b) $\ln(\sqrt{e})$ | <input type="text"/> | e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ | <input type="text"/> |
| c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ | <input type="text"/> | f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$ | <input type="text"/> | d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{-\ln \ln 2}$ | <input type="text"/> | e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$ | <input type="text"/> |
| c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$ | <input type="text"/> | f) $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$ | <input type="text"/> |

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

- | | |
|--|----------------------|
| a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021+x}{2021-x}$ | <input type="text"/> |
| b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ | <input type="text"/> |
| c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ | <input type="text"/> |
| d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.



Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- | | |
|---|----------------------|
| a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. | <input type="text"/> |
| b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ | <input type="text"/> |
| c) Déterminer la limite de f en $+\infty$ | <input type="text"/> |
| d) Déterminer la limite de f en $-\infty$ | <input type="text"/> |

Calcul 7.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

- a) $f(2e^x - 1)$ d) $xf'(x) - 1$
- b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$
- c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$

Équations, inéquations

Calcul 7.10



Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

- a) $e^{3x-5} \geq 12$
- b) $1 \leq e^{-x^2+x}$
- c) $e^{1+\ln x} \geq 2$
- d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$
- e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$
- f) $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$

Calcul 9.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$

Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — bis.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

c) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

d) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

Calcul 9.5 — Avec des quotients.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 \sin(x) + 3}$

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2}$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$

Opérations et fonctions composées

Calcul 9.6



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}\right)$

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 9.7



Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$ et $f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2+x}$

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x+2}{x-1}$

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis

Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 20.1 — Fonctions circulaires réciproques.



Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

e) $\arctan(1)$

c) $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

f) $\arccos\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$

Calcul 20.2 — Valeurs des fonctions hyperboliques.



Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

a) $\text{ch}(0)$

d) $\text{sh}(\ln(3))$

b) $\text{sh}(0)$

e) $\text{ch}(\ln(2/3))$

c) $\text{ch}(\ln(2))$

f) $\text{th}(\ln(2))$

Calcul 20.3 — Identités de trigonométrie hyperbolique.



Soient x et y des réels.

Calculer en développant soigneusement, et en simplifiant au maximum, les expressions suivantes.

a) $\text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{ch}(y)\text{sh}(x)$

b) $\text{ch}(x)\text{ch}(y) - \text{sh}(x)\text{sh}(y)$

Résolution d'équations

Calcul 20.4 — Fonctions $x \mapsto a^x$.



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \frac{9^x}{2}$

c) $2^x = 3 \times 4^x$

b) $4^x = 2 \times 2^x$

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$...

Calcul 20.5 — Fonctions $x \mapsto a^x$ (plus difficile).



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

- a) $2^x + 4^x = 4$
- b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$
- c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$
- d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0$

Calcul 20.6 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

- a) $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
- b) $\cos(\arccos(x)) = 0$
- c) $\arccos(\cos(x)) = 0$
- d) $\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3}$
- e) $\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3}$
- f) $\tan(\arctan(x)) = 1$

Calcul 20.7 — Équations avec des fonctions hyperboliques.



Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

- a) $\text{ch}(x) = \sqrt{5}$
- b) $\text{sh}(x) = 1$
- c) $\text{th}(x) = \frac{1}{3}$
- d) $\text{ch}(x) \leq 4$
- e) $\text{sh}(x) \geq 3$
- f) $\text{th}(x) \leq \frac{1}{2}$

Dérivation

Calcul 20.8 — Quelques calculs de dérivées.



Dériver les fonctions suivantes.

- a) $x \mapsto 2^x + x^2$
- b) $x \mapsto \frac{3^x}{5^x + 1}$
- c) $x \mapsto x^x$
- d) $x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$

Calcul 20.9 — Quelques calculs de dérivées — bis.



Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x)$.

- | | |
|---|--|
| a) $x \mapsto \arcsin(x^2) \dots\dots$ <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> | c) $x \mapsto \arctan(\text{th}(x)) \dots$ <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $x \mapsto \text{ch}(x)\text{sh}(x) \dots\dots$ <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> | d) $x \mapsto \text{sh}(\text{ch}(x)) \dots\dots$ <input style="width: 150px; height: 25px;" type="text"/> |

Calcul 20.10 — Deux dérivées importantes.



- | | |
|---|---|
| a) $x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |

Calcul 20.11 — Des dérivées plus compliquées.



Dériver les fonctions suivantes. Dans ce qui suit, la fonction F est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$.

- | | |
|--|---|
| a) $x \mapsto F(x^x) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\text{ch}(x))}) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |
| c) $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + x \arcsin(x) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |
| d) $x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |