Contrôle de cours 2 - Trigonométrie et complexes - Sujet A
Mercredi 17 septembre 2025

Question 1 (2 pts)

Résoudre l'équation :

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Deux angles ont le même cosinus si et seulement si ils sont soit égaux, soit opposés, modulo 2π. Donc l'équation est équivalente à : $3x-\frac{\pi}{3}\equiv x-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $3x-\frac{\pi}{3}\equiv -\left(x-\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$.

La première donne $x\equiv\frac{\pi}{24}[\pi]$, la seconde $x\equiv\frac{7\pi}{48}[\pi/2]$.

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\equiv\frac{\pi}{24}[\pi]\right\}\cup\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\equiv\frac{7\pi}{48}[\pi/2]\right\}$. □

Question 2 (2 pts)

Résoudre l'inéquation $\sin x\geq\frac{1}{2}$. On pourra faire un dessin.

En s'aidant du cercle trigonométrique, l'inéquation est équivalente à : $\exists k\in\mathbb{Z}$ tel que $-\frac{7\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{7\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. □

Question 3 (2 pts)

1. Écrire sous forme algébrique :
   $z_1=\frac{2-i}{2+5i}=\frac{(2-i)(2-5i)}{|2+5i|^2}=\frac{-1-12i}{29}$
2. Écrire sous forme exponentielle :
   $z_2=1+i\sqrt{3}=2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ □

Question 4 (2 pts)

(a) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Rappeler la définition de $\mathrm{e}^{i\theta}$:

$$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

(b) Soit z un complexe non nul. Rappeler la définition d'un argument de z :

Un argument de z est une mesure de l'angle orienté entre $\vec{i}$ et le point d'affixe z.

Question 5 (3 pts)

1. Soit $p,q\in\mathbb{R}$. Factoriser par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{iq}&=\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\left(\frac{\mathrm{e}^{ip}}{\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}}+\frac{\mathrm{e}^{iq}}{\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}}\right)\\&=\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\\&=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}.\end{aligned}$$

2. En déduire la formule de factorisation pour

$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

en prenant les parties réelles dans la factorisation par l'angle moitié. □

Contrôle de cours 2 - Trigonométrie et complexes - Sujet B
Mercredi 17 septembre 2025

Question 1 (2 pts)

Résoudre l'équation :

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Deux angles ont le même cosinus si et seulement si ils sont soit égaux, soit opposés, modulo 2π. Donc l'équation est équivalente à : $3x - \frac{\pi}{4} \equiv x - \frac{\pi}{3} [2\pi]$ ou $3x - \frac{\pi}{4} \equiv -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) [2\pi]$.

La première donne $x \equiv -\frac{\pi}{24} [\pi]$, la seconde $x \equiv \frac{7\pi}{48} [\pi/2]$.

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv -\frac{\pi}{24} [\pi]\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv \frac{7\pi}{48} [\pi/2]\right\}$. □

Question 2 (2 pts)

Résoudre l'inéquation $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. On pourra faire un dessin.

En s'aidant du cercle trigonométrique, l'inéquation est équivalente à : $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$.

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. □

Question 3 (2 pts)

1. Écrire sous forme algébrique :
   $z_1 = \frac{2+3i}{5+i} = \frac{(2+3i)(5-i)}{|5+i|^2} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1+i}{2}$
2. Écrire sous forme exponentielle :
   $z_2 = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ □

Question 4 (2 pts)

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de $e^{i\theta}$:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

2. Soit z un complexe non nul. Rappeler la définition d'un argument de z :

Un argument de z est une mesure de l'angle orienté entre $\vec{i}$ et le point d'affixe z.

Question 5 (3 pts)

1. Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Factoriser par l'angle moitié :

$$\begin{aligned} e^{ip} + e^{iq} &= e^{i\frac{p+q}{2}}\left(\frac{e^{ip}}{e^{i\frac{p+q}{2}}} + \frac{e^{iq}}{e^{i\frac{p+q}{2}}}\right) \\ &= e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}. \end{aligned}$$

2. En déduire la formule de factorisation pour

$$\sin(p)+\sin(q)=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

en prenant les parties imaginaires dans la factorisation par l'angle moitié. □