

Correction du Devoir sur temps libre 2

Correction de l'exercice 1 :

- Comme $z^n = 1$, on prend le module des deux côtés et $|z^n| = 1$. Or $|z^n| = |z|^n$, donc $|z|^n = 1$. Or $|z|$ est un nombre réel positif, donc $|z| = 1$.
 - D'après la question précédente, la forme trigonométrique de z est $z = |z|e^{i\varphi}$ pour un certain $\varphi \in \mathbb{R}$. Or il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\varphi \equiv \theta[2\pi]$, donc $z = e^{i\theta}$.
 - D'après la question précédente, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = 1$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2k\pi$. D'où $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ et $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
D'autre part, $k = \frac{n\theta}{2\pi}$, et comme $\theta \in [0, 2\pi[$, $k \in [0, n[$. Puis, k étant entier, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
En conclusion, il existe $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
- D'après la question précédente, si z est solution, alors $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour un certain $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Réciproquement, on vérifie que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $(e^{\frac{2ik\pi}{n}})^n = 1$.
Enfin, si $k, k' \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ avec $k \neq k'$, alors $\frac{2ik\pi}{n}, \frac{2ik'\pi}{n} \in [0, 2\pi[$ et ils sont différents, donc $e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_n) est $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\right\}$.
- En mettant j sous forme trigonométrique, on trouve $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de (E_3) est $\{j^0, j^1, j^2\} = \{1, j, j^2\}$.
 - On fait un dessin!
 - On peut calculer $AB = |j - 1| = \left|e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1\right| = \left|e^{\frac{i\pi}{3}}(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}})\right| = \left|2i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \sqrt{3}$. De même, on trouve $BC = \sqrt{3}$ et $AC = \sqrt{3}$. Donc ABC est équilatéral.
- En simplifiant, on trouve $S = 1 - \omega^n = 1 - 1 = 0$.
 - Comme $\omega \neq 1$, la somme est nulle.
 - Soit $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. On a $\omega^{n-k} = e^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}} = e^{2i\pi - \frac{2ik\pi}{n}} = e^{2i\pi} e^{-\frac{2ik\pi}{n}}$, donc $\omega^{n-k} = \overline{\omega^k}$.
- D'après la question 4b, $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$. D'après la question 4c, $\omega^4 = \overline{\omega}$ et $\omega^3 = \overline{\omega^2}$, donc $1 + \omega + \overline{\omega} + \omega^2 + \overline{\omega^2} = 0$. Or $\omega + \overline{\omega} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et de même $\omega^2 + \overline{\omega^2} = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
Ainsi, $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.
 - On remarque que $\frac{4\pi}{5} = 2 \times \frac{2\pi}{5}$. Notons $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, de sorte que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\alpha^2 - 1$ (formule de duplication). D'où, $1 + 2\alpha + 2(2\alpha^2 - 1) = 0$ et $4\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 20$, donc les deux solutions sont $\frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Or, $\frac{2\pi}{5} \in [0, \pi/2]$, donc $\alpha \geq 0$. Ainsi, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Correction de l'exercice 2 :

- $a(x) = \frac{x^5}{5} - 4x^2 + \frac{2x}{3} - 3$: la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $a'(x) = x^4 - 8x + \frac{2}{3}$.
 - $b(x) = Ax^2 + Bx + C$: la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $b'(x) = 2Ax + B$.
 - $c(x) = \frac{x+3}{1-2x}$: la fonction est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, et $c'(x) = \frac{1 \times (1-2x) - (x+3)(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$.
 - $f(x) = \sin(3x) + \cos\left(\frac{x}{5}\right)$: la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3\cos(3x) - \frac{1}{5}\sin\left(\frac{x}{5}\right)$.

(e) $g(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$: la fonction est dérivable lorsque $\ln(x+1) > 0$, c'est à dire lorsque $x+1 > 1$, donc $x > 0$. De

plus, en posant $u(x) = \ln(x+1)$, on a $g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, et $u'(x) = \frac{1}{x+1}$, d'où $g'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}}{2\sqrt{\ln(x+1)}} = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$.

(f) $h(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$: la fonction est dérivable lorsque $x > 0$ et $\ln(x) > 0$, donc $x > 1$ et $\ln(\ln(x)) > 0$, donc $\ln(x) > 1$ et $x > e$. Donc sur $]e, +\infty[$. Pour calculer la dérivée, on pose $u(x) = \ln(\ln(x))$, de sorte que $h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. Puis,

$u(x) = \ln(v(x))$, avec $v(x) = \ln(x)$, de sorte que $u'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)}$.

D'où $h'(x) = \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))}$.

On a déjà la dérivée de c , qui est positive sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ car $(1-2x)^2 \geq 0$.

De plus, $c(x) = \frac{x(1+\frac{3}{x})}{x(\frac{1}{x}-2)}$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = -\frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} c(x)$.

Enfin, comme $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} x+3 = \frac{7}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} 1-2x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} 1-2x = 0^-$, on a $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} c(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} c(x) = -\infty$.

D'où le tableau de variation complet :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$c'(x)$	+		+
c	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$

2. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^2-2}$: $\frac{x^2+3x-1}{x^2-2} = \frac{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{2}{x^2})} = \frac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^2-2} = 1$.

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+3}{x^2-4x+1}$: $\frac{5x+3}{x^2-4x+1} = \frac{x(5+\frac{3}{x})}{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{5+\frac{3}{x}}{x(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+3}{x^2-4x+1} = 0$.

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2}$: on utilise la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2} &= \frac{(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2})(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-2})}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-2}} \\ &= \frac{x^2+2 - (x^2-2)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-2}} \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-2} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-2} = 0$.

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$: on factorise le numérateur : $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ car les deux racines sont 1 et 2. Donc $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$. D'où $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = 1-2 = -1$.

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x + 1}$: on factorise par ce qui va le plus vite vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(e^x + x)}{x + 1} &= \frac{\ln(e^x(1 + \frac{x}{e^x}))}{x(1 + \frac{1}{x})} \\ &= \frac{x + \ln(1 + \frac{x}{e^x})}{x(1 + \frac{1}{x})} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{\ln(1 + \frac{x}{e^x})}{x(1 + \frac{1}{x})} \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$ et d'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{x}{e^x})}{x(1 + \frac{1}{x})} = 0$.

D'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x + 1} = 1}$.

(f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$: on utilise un encadrement : pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \\ -x &\leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$, donc par encadrement, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.

Correction de l'exercice 3 : Supposons tout d'abord que $z \in \mathbb{R}$. Alors $\left| \frac{z+i}{z-i} \right| = \frac{|z+i|}{|z-i|} = \frac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{z^2+1}} = 1$. Donc $\frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}$.

Réciproquement, supposons que $\frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta}$. On isole : $z+i = (z-i)e^{i\theta}$, donc $z(1 - e^{i\theta}) = -i(1 + e^{i\theta})$. On remarque alors que si $1 - e^{i\theta} = 0$, alors $1 + e^{i\theta} = 0$, ce qui n'est pas possible. Donc $1 - e^{i\theta} \neq 0$.

Ainsi, $z = -i \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = -i \frac{2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2}}{-2i \sin(\theta/2) e^{i\theta/2}}$ en factorisant par l'angle moitié. Donc $z = \frac{1}{\tan(\theta/2)} \in \mathbb{R}$.

D'où $\boxed{\frac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U} \iff z \in \mathbb{R}}$.