Trigonométrie et nombres complexes - Exercices

I. Trigonométrie

Exercice 1. Déterminer les valeurs exactes de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ (sous réserve de définition) pour les réels x suivants :
1. $x=\dfrac{5\pi}{6}$ 2. $x=\dfrac{27\pi}{2}$ 3. $x=\dfrac{7\pi}{4}$ 4. $x=-\dfrac{59\pi}{6}$ 5. $x=\dfrac{17\pi}{4}$ 6. $x=\dfrac{29\pi}{3}$

Exercice 2. Calculer les cosinus, sinus et tangentes en a, b, $a+b$ et $a-b$ lorsque cela est posible :

1. $\begin{cases}\sin a=\dfrac{2}{5}, & 0<a<\dfrac{\pi}{2}\\ \sin b=\dfrac{3}{5}, & \dfrac{\pi}{2}<b<\pi\end{cases}$ 2. $\begin{cases}\cos a=-\dfrac{1}{2}, & \dfrac{\pi}{2}<a<\pi\\ \sin b=-\dfrac{1}{3}, & \pi<b<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$ 3. $\begin{cases}\cos a=\dfrac{5}{13}, & 0<a<\dfrac{\pi}{2}\\ \sin b=\dfrac{12}{13}, & 0<b<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

Exercice 3. Soit x un réel tel que les expressions suivantes sont bien définies. Simplifier ces expressions :
1. $A=\sin(x+\pi)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$; 2. $B=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$; 3. $C=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$;
4. $D=\cos x+\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{4\pi}{3}\right)$

Exercice 4. 1. À l'aide des formules d'addition, déterminer les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente de $\dfrac{\pi}{12}$.
2. En déduire les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente des angles $\dfrac{3\pi}{12}$, $\dfrac{5\pi}{12}$ et $\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 5. 1. Déterminer les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente de $\dfrac{\pi}{8}$.
2. En déduire les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente des angles $\dfrac{3\pi}{8}$, $\dfrac{-5\pi}{8}$.

Exercice 6. Résoudre l'équation $\cos 2x+\cos x=0$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}$; b) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$; c) $\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\tan\left(x+\dfrac{4\pi}{5}\right)$; d) $\tan(x)\tan(2x)=1$

Exercice 8. 1. Démontrer que pour tout réel x, $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin(x+\varphi)$, où φ est un réel dont on précisera la valeur.
2. Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'équation : $\cos x+\sin x=1$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $\cos x-\sin x=1$; b) $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=-\sqrt{2}$; c) $\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x+\sqrt{3}-1=0$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $\cos x\leq\dfrac{1}{2}$; b) $|\sin x|\leq\dfrac{1}{2}$; c) $-1\leq\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq\dfrac{1}{2}$; d) $\cos x+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)>0$

II. Nombres complexes

Exercice 11. Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $z=(3+2i)^2(2-i)$
b) $z=(1+i\sqrt{3})^4$
c) $z=(1-i)(1-2i)(1-3i)$
d) $z=(1+i)(2-i)(3+i)(4-i)$
e) $z=(1+i)(1+2i)^2(1+3i)^3$
f) $z=\left(\dfrac{3}{4}-2i\right)\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{i}{2}\right)$
g) $z=(2+i)^3+(1-2i)^3$
h) $z=i+\dfrac{1}{i}$
i) $z=\dfrac{2+i}{1-i}$
j) $z=\dfrac{1}{(1-i)(2-i)}$
k) $z=\dfrac{(-3+4i)(5-4i)}{15-10i}$
l) $z=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$
m) $z=\dfrac{1}{a+a^2i}$, $a\in\mathbb{R}^*$
n) $z=\dfrac{1}{1-i}+\dfrac{2}{1-2i}+\dfrac{3}{1-3i}$
o) $z=1+\dfrac{i}{2+\dfrac{i}{3}}$

Exercice 12. 1. Calculer $(1+i)^n$ pour $n=0,1,2,3,4$ et 5.
2. En déduire la valeur de $(1+i)^n$ en fonction de n.

Exercice 13. 1. Soient : $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1+i\sqrt{3}$, $z_3 = z_1 \times z_2$. Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ (cf. exercice 4)

2. a étant un nombre réel, exprimer les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

a) $z=\cos a+i\sin a$	d) $z=\sin a+i\cos a$	g) $z=\mathrm{e}^{ia}+1$
b) $z=\cos a-i\sin a$	e) $z=-\cos a-i\sin a$	
c) $z=-\sin a+i\cos a$	f) $z=-\sin a-i\cos a$	h) $z=\mathrm{e}^{ia}-1$

3. Déterminer le module et un argument de : $z_1 = (1+i)^n + (1-i)^n$ et de $z_2 = (1+i\tan\alpha)^n$.

Exercice 14. 1. Écrire sous forme exponentielle :

a) $1+i$	b) $1-i$	c) $i-1$	d) $\sqrt{3}+i$

2. En déduire les parties réelles et imaginaires de :

a) $\dfrac{(1-i)^5}{(1+i)^4}$	b) $(1+i)^{44}$	c) $\left(\dfrac{-4}{\sqrt{3}+i}\right)^{19}$

Exercice 15. Soit z un nombre complexe de module 1. Simplifier $|z+1|^2+|z-1|^2$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z+2\overline{z}=5+3i$	2. $3\overline{z}=2z+i$	3. * $\overline{z}^2+2|z|^2-3=0$

Exercice 17. * On note $j=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Soient a, b et c trois nombres réels et les trois nombres compexes :

$$z_1 = a+b+c\,;\; z_2 = a+bj+cj^2\,;\; z_3 = a+bj^2+cj.$$

1. Déterminer le module et un argument de j.
2. Calculer j^3 et $j+j^2$.
3. Déterminer la valeur de $s_k = 1+j^k+j^{2k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
4. (a) Préciser les parties réelles et imaginaires de z_1, z_2 et z_3.
   (b) Démontrer que ces nombres complexes sont tous réels si et seulement si $b=c$.
5. (a) À quelle condition ces complexes sont-ils égaux à un même réel ? Déterminer en particulier a, b et c de sorte que $z_1=z_2=z_3=1$.
   (b) Déterminer les valeurs de a, b et c pour lesquelles $z_1, z_2, z_3 \in \{0,1\}$.

Exercice 18. 1. Factoriser $\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{iq}$ et $\mathrm{e}^{ip}-\mathrm{e}^{iq}$.

2. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1 avec $z_1z_2\neq -1$. Vérifier que $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel, puis l'exprimer en fonction des arguments de z_1 et z_2.
3. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Montrer que $\dfrac{1+z}{1-z}\in i\mathbb{R} \iff |z|=1$.
4. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Déterminer, lorsque cela est possible, le module et un argument de $z=\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{2i\theta}$.

Exercice 19. 1. Justifier qu'il existe $\theta_0\in\mathbb{R}$ tel que $4-3i=5\,\mathrm{e}^{i\theta_0}$, puis donner une valeur approchée au millième de θ_0 avec la calculatrice.

2. Écrire $4\cos t-3\sin t$ sous la forme $A\cos(t+\varphi)$ puis sous la forme $B\sin(t+\psi)$.

Exercice 20. Soit A, B, C, D quatre points du plan d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D. On note I, J, K et L les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$. Que dire de $IJKL$?

Exercice 21. On rappelle que l'isobarycentre d'un triangle ABC est le point G vérifiant $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.
Soient $A(2-3i)$, $B(2-i)$ et $C(5+5i)$. Quel est l'affixe de l'isobarycentre du triangle ABC ?

III. Indications - Solutions

Exercice 1 :

1. $x=\frac{5\pi}{6}, \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin x=\frac{1}{2}, \tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
2. $x=\frac{27\pi}{2}, \cos x=0, \sin x=-1$
3. $x=\frac{7\pi}{4}, \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan x=-1$
4. $x=-\frac{59\pi}{6}, \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin x=\frac{1}{2}, \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$
5. $x=\frac{17\pi}{4}, \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan x=1$
6. $x=\frac{29\pi}{3}, \cos x=\frac{1}{2}, \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan x=-\sqrt{3}$

Exercice 2 :

1. $\cos a=\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan a=\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\cos b=-\frac{4}{5}$, $\tan b=-\frac{3}{4}$;
2. $\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan a=-\sqrt{3}$, $\cos b=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan b=\frac{1}{2\sqrt{2}}$;
3. $\sin a=\frac{12}{13}$, $\tan a=\frac{12}{5}$, $\cos b=\frac{12}{13}$, $\tan b=\frac{5}{12}$.

Exercice 3 : 1. $A=0$; 2. $B=0$; 3. $C=0$; 4. $D=0$.

Exercice 4 :

1. Remarquer que $2\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$, puis utiliser les formules de duplication : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$.
2. Utiliser les angles associés à $\frac{\pi}{12}$.

Exercice 5 : S'inspirer de l'exercice 4.

Exercice 6 : $S=\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 7 :

a) $S=\left\{k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $S=\left\{\frac{7\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{11\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $S=\left\{k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) $S=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice 8 :

1. Utiliser la formule d'addition, puis identifier les deux côtés de l'égalité. On trouve $\varphi=\frac{\pi}{4}$.
2. $S=\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$.

Exercice 9 : On pourra penser à utiliser les formules d'addition pour transformer les équations avant de les résoudre.

a) $S=\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $S=\left\{\frac{5\pi}{24}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{11\pi}{24}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $S=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, on pourra utiliser les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ obtenues au 4.

Exercice 10 :

a) $S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right]$; b) $S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right]$; c) $S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{24}+k\pi, \frac{17\pi}{24}+k\pi\right]$;
d) $S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right[$.

Exercice 11 :

a) $z=(3+2i)^2(2-i)=22+19i$

b) $z=(1+i\sqrt{3})^4=-8-8\sqrt{3}i$

c) $z=(1-i)(1-2i)(1-3i)=-10$

d) $z=(1+i)(2-i)(3+i)(4-i)=38+16i$

e) $z=(1+i)(1+2i)^2(1+3i)^3=200+100i$

f) $z=\left(\frac{3}{4}-2i\right)\left(\frac{4}{3}-\frac{i}{2}\right)=-\frac{73i}{24}$

g) $z=(2+i)^3+(1-2i)^3=-9+13i$

h) $z=i+\frac{1}{i}=0$

i) $z=\frac{2+i}{1-i}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

j) $z=\frac{1}{(1-i)(2-i)}=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$

k) $z=\frac{(-3+4i)(5-4i)}{15-10i}=-\frac{61}{65}+\frac{98}{65}i$

l) $z=\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

m) $z=\frac{1}{a+a^2i}=\frac{1}{1+a}-\frac{a}{1+a}i$

n) $z=\frac{1}{1-i}+\frac{2}{1-2i}+\frac{3}{1-3i}=\frac{6}{5}+\frac{11}{5}i$

o) $z=1+\frac{i}{2+\frac{i}{3}}=\frac{40}{37}+\frac{18}{37}i$

Exercice 12 :

1. $(1+i)^0=1$, $(1+i)^1=1+i$, $(1+i)^2=2i$, $(1+i)^3=-2+2i$, $(1+i)^4=-4$, $(1+i)^5=-4-4i$.
2. Remarquer qu'on passe de $(1+i)^n$ à $(1+i)^{n+4}$ en multipliant par -4. On distingue selon le reste de la division de n par 4. Par exemple, si $n=4k$, $(1+i)^n=(-4)^k=(-4)^{\frac{n}{4}}$. On fait de même pour $n=4k+1$, $n=4k+2$ et $n=4k+3$.

Exercice 13 :

1. $z_1=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2=2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}$ et $z_3=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}}=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$. Donc $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
2. a) $\cos a+i\sin a=\mathrm{e}^{ia}$
   b) $\cos a-i\sin a=\mathrm{e}^{-ia}$
   c) $-\sin a+i\cos a=\mathrm{e}^{i(a+\frac{\pi}{2})}$
   d) $\sin a+i\cos a=\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{2}-a)}$
   e) $-\cos a-i\sin a=\mathrm{e}^{i(a+\pi)}$
   f) $-\sin a-i\cos a=\mathrm{e}^{-i(a+\frac{\pi}{2})}$
   g) $\mathrm{e}^{ia}+1=2\cos\frac{a}{2}\mathrm{e}^{i\frac{a}{2}}$
   h) $\mathrm{e}^{ia}-1=2\sin\frac{a}{2}\mathrm{e}^{i(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2})}$
3. $1+i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$ puis formule d'Euler : $z_1=(2\sqrt{2})^n\cos(\pi/4)$. $(1+i\tan\alpha)^n=\frac{1}{\cos^n\alpha}\mathrm{e}^{in\alpha}$.

Exercice 14 :

1. a) $1+i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$
   b) $1-i=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$
   c) $i-1=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$
   d) $\sqrt{3}+i=2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$
2. a) $\frac{(1-i)^5}{(1+i)^4}=1-i$
   b) $(1+i)^{44}=-4194304$
   c) $\left(\frac{-4}{\sqrt{3}+i}\right)^{19}=262144\sqrt{3}-262144i$

Exercice 15 : $|z+1|^2+|z-1|^2=4$. On peut répondre à cet exercice sans faire de calcul !

Exercice 16 :

1. $z=\frac{5}{3}-3i$
2. $z=-\frac{1}{5}i$
3. On a $\overline{z}^2=3-2|z|^2\in\mathbb{R}$. Si $3-2|z|^2\geq 0$, alors $\overline{z}\in\mathbb{R}$, donc $z^2=\overline{z}^2=|z|^2$, l'équation devient $3z^2-3=0\iff z=\pm1$. Si $3-2|z|^2<0$, alors $\overline{z}\in i\mathbb{R}$, donc $z^2=\overline{z}^2=-|z|^2$, l'équation devient $-z^2-3=0$ et $z=\pm\sqrt{3}$. Donc $S=\{\pm\sqrt{3},\pm1\}$.

Exercice 17 :

1. $j=\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
2. $j^3=1$ et $j+j^2=-1$.
3. $s_{3l}=3$, $s_{3l+1}=s_{3l+2}=0$.
4. (a) $z_1=a+b+c, z_2=a-\frac{b+c}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)i$ et $z_3=a-\frac{b+c}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(c-b)i$.
   (b) $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{R}\iff b-c=0$ et $c-b=0\iff b=c$.
5. (a) On doit avoir $b=c$ et $a+b+c=a-\frac{b+c}{2}\iff a+2b=a-b\iff b=0$. Donc $z_1=z_2=z_3=1\iff a=1$ et $b=c=0$.
   (b) Si $z_1,z_2,z_3\in\{0,1\}$ en particulier, $b=c$ et $z_2=z_3=a-b$. Si $z_2=z_3=0$, on trouve $z_1=3a$, donc soit $a=0=b=c$, soit $a=\frac{1}{3}=b=c$. Si $z_2=z_3=1$, soit $z_1=1$, auquel cas, $a=1$ et $b=c=0$, soit $z_1=0$, auquel cas, $a=\frac{2}{3}$ et $b=-\frac{1}{3}=c$.

Exercice 18 :

1. $\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{iq}=2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}$ et $\mathrm{e}^{ip}-\mathrm{e}^{iq}=2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}$.
2. $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=\frac{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$.

3. $\Rightarrow$: on pose $\dfrac{1+z}{1-z} = ib$, on résout en z puis on calcule le module. $\Leftarrow$: on pose $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ puis on factorise par l'angle moitié.
4. On factorise par l'angle moitié : $z = \mathrm{e}^{i3\theta/2}(\mathrm{e}^{-i\theta/2} + \mathrm{e}^{i\theta/2}) = \cos(\theta/2)\,\mathrm{e}^{i3\theta/2}$. On discute :
   - $\cos(\theta/2) = 0 \iff \theta \equiv \pi\ [2\pi]$, et dans ce cas $z = 0$, donc n'a pas d'argument;
   - $\cos(\theta/2) > 0 \iff \theta/2 \in]-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi[$, et dans ce cas, $|z| = \cos(\theta/2)$ et $\arg(z) \equiv 3\theta/2\ [2\pi]$;
   - $\cos(\theta/2) < 0 \iff \theta/2 \in]\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi[$, et dans ce cas, $|z| = -\cos(\theta/2)$ et $\arg(z) \equiv 3\theta/2 + \pi\ [2\pi]$.

Exercice 19 :

1. $|4-3i| = 5$, $\theta_0 \approx -0{,}644\, rad$.
2. $4\cos t - 3\sin t = 5\cos(t-\theta_0) = -5\sin\left(t - \dfrac{\pi}{2} - \theta_0\right)$.

Exercice 20 : I est d'affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$, J est d'affixe $\dfrac{z_B + z_C}{2}$, K est d'affixe $\dfrac{z_C + z_D}{2}$ et L est d'affixe $\dfrac{z_D + z_A}{2}$. Ainsi $\overrightarrow{IJ}$ est d'affixe $\dfrac{z_B + z_C}{2} - \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{z_C - z_A}{2}$ et $\overrightarrow{LK}$ est d'affixe $\dfrac{z_C + z_D}{2} - \dfrac{z_D + z_A}{2} = \dfrac{z_C - z_A}{2}$. On conclut que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ et donc que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 21 : En passant en complexe, on trouve $z_G = 3 + \dfrac{1}{3}i$.