Contrôle de cours 3 - Fonctions - Sujet A
Mercredi 24 septembre 2025

Question 1 (2 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Donner la définition de f est strictement croissante sur I :

$$f \text{ est strictement croissante sur } I \text{ ssi } \forall x, y \in I, \text{ si } x < y \text{ alors } f(x) < f(y).$$

2. Donner la définition de f admet un minimum en $a \in I$:

$$f \text{ admet un minimum en } a \in I \text{ ssi } \forall x \in I, f(x) \geq f(a).$$

Question 2 (3 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. Donner la définition de f est dérivable en a.
   f est dérivable en a ssi la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque $h \to 0$ existe et est finie.
2. On suppose que f est dérivable en a. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. □

Question 3 (2 pts)

Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$. □

Question 4 (4 pts)

1. Déterminer proprement la limite lorsque $x \to +\infty$ de $x + \sin(x)$.
   Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin(x)$, donc $x + 1 \leq x + \sin(x)$. Comme $x + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, par minoration, $x + \sin(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité et dériver $f : x \mapsto \sqrt{\ln(2+3x) - 1}$
   f est dérivable en x ssi $2 + 3x > 0$ et $\ln(2+3x) - 1 > 0$ ssi $x > -frac23$ et $x > \dfrac{e^1 - 2}{3}$. Donc f est dérivable sur $I = \left]\dfrac{e^1 - 2}{3}, +\infty\right[$. De plus, on pose $u : x \mapsto \ln(2+3x) - 1$ dont la dérivée est $u' : x \mapsto \dfrac{3}{2+3x}$. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{3}{2(2+3x)\sqrt{\ln(2+3x)-1}}$. □

Contrôle de cours 3 - Fonctions - Sujet B
Mercredi 24 septembre 2025

Question 1 (2 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Donner la définition de f est strictement décroissante sur I :

   f est strictement croissante ssi $\forall x, y \in I$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

2. Donner la définition de f a un maximum en $a \in I$:

   f admet un maximum en $a \in I$ ssi $\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$.

Question 2 (3 pts)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. Donner la définition de f est dérivable en a.
   f est dérivable en a ssi la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque $h \to 0$ existe et est finie.
2. On suppose que f est dérivable en a. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $(a, f(a))$ est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. □

Question 3 (2 pts)

Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$. □

Question 4 (4 pts)

1. Déterminer proprement la limite lorsque $x \to +\infty$ de $\dfrac{\cos(x)}{x}$. Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\cos(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. Comme $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, par encadrement, $\dfrac{\cos(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité et dériver $f : x \mapsto \sqrt{\ln(1+2x)-1}$ f est dérivable en x ssi $3+2x > 0$ et $\ln(3+2x)-1 > 0$ ssi $x > -\dfrac{3}{2}$ et $x > \dfrac{e^1-3}{2}$. Donc f est dérivable sur $I = \left]\dfrac{e^1-3}{2}, +\infty\right[$.
   De plus, on pose $u : x \mapsto \ln(3+2x)-1$ dont la dérivée est $u' : x \mapsto \dfrac{2}{3+2x}$. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2}{2(3+2x)\sqrt{\ln(3+2x)-1}}$. □