Chapitre 3 : Outils pour l'étude de fonctions

Pour nous, une fonction sera :

- Une formule, par exemple $f(x) = x+2$ si $x \geq 1$ et $f(x) = -x+4$ si $x < 1$.
- Un graphique : aux abscisses x, la fonction fait correspondre une valeur $y = f(x)$ en ordonnée.

Définition .1.
- L'**ensemble de définition** D_f d'une fonction f est le plus grand ensemble de nombres réels x tels que $f(x)$ existe.
- La **courbe représentative** d'une fonction f dans un repère est l'ensemble $\mathscr{C}_f = \left\{(x, f(x)), x \in D_f\right\}$. Elle a pour équation $y = f(x)$.

On note $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur l'ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

I. Généralités sur les fonctions

I.1. Opérations sur les fonctions

Définition I.1. Soient $f, g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $\lambda f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ par

$$\forall x \in I,\ (f+g)(x) = f(x)+g(x),\ (f\times g)(x) = f(x)\times g(x) \text{ et } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Remarque I.1. Si les deux fonctions f et g ne sont pas définies sur le même ensemble, alors le résultat est défini sur l'intersection des deux ensembles de définition.

Définition I.2. Soient $f \in \mathscr{F}(I,J)$ et $g \in \mathscr{F}(J,\mathbb{R})$. La **fonction composée** de f et g, notée $g \circ f$ est la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I,\ (g\circ f)(x) = g(f(x)).$$

On a quelques exemples importants de fonctions composées : les fonctions associées.

Proposition I.1. *Soient $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.*

- *La courbe représentative de $x \mapsto f(x-a)$ est la translatée de $\mathscr{C}_f$ de vecteur $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, son ensemble de définition est $I+a$;*
- *La courbe représentative de $x \mapsto f(x)+a$ est la translatée de $\mathscr{C}_f$ de vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$, son ensemble de définition est I ;*
- *La courbe représentative de $x \mapsto f(ax)$ est obtenue à partir de $\mathscr{C}_f$ en dilatant les abscisses d'un coefficient $\dfrac{1}{a}$, son ensemble de définition est $\dfrac{1}{a}I$;*
- *La courbe représentative de $x \mapsto af(x)$ est obtenue à partir de $\mathscr{C}_f$ en dilatant les ordonnées d'un coefficient a, son ensemble de définition est I ;*
- *La courbe représentative de $x \mapsto |f(x)|$ est obtenue à partir de $\mathscr{C}_f$ en gardant les parties au-dessus de l'axe des abscisses et en prenant le symétrique par rapport à (Ox) de celles qui sont en-dessous, son ensemble de définition est I.*

I.2. Symétries

Définition I.3. Soit $I \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine. On dit qu'une fonction $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ est **paire** (resp. **impaire**) si pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Proposition I.2.
- *Une fonction f est paire ssi $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
- *Une fonction f est impaire ssi $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.*

Remarque I.2. Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.

> **Définition I.4.** Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $T > 0$. On dit que f est **périodique de période** T si pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$.

Remarque I.3. Lorsqu'une fonction est T-périodique, il suffit de l'étudier sur $[0, T]$.

I.3. Monotonie

> **Définition I.5.** Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que :
> - f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur I si :
>
> $$\forall x, y \in I,\ \text{si } x < y \text{ alors } f(x) \leq f(y) (\text{resp. } f(x) \geq f(y))$$
>
> - f est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) sur I si :
>
> $$\forall x, y \in I,\ \text{si } x < y \text{ alors } f(x) < f(y) (\text{resp. } f(x) > f(y))$$
>
> - f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I si elle est croissante ou décroissante sur I (resp. strictement croissante ou strictement décroissante sur I).

> **Proposition I.3.** *Soient $f, g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$.*
> - *Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) alors $f+g$ est croissante (resp. décroissante).*
> - *Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes)* ***et positives*** *alors fg est croissante (resp. décroissante).*

> **Proposition I.4.** *Soient $f \in \mathscr{F}(I,J)$ et $g \in \mathscr{F}(J,\mathbb{R})$.*
> - *Si f et g sont monotones (resp. strictement monotones) et de même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante (resp. strictement croissante).*
> - *Si f et g sont monotones (resp. strictement monotones) et de monotonies contraires, alors $g \circ f$ est décroissante (resp. strictement décroissante).*

I.4. Majoration, minoration

> **Définition I.6.** Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que
> - f est **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que pour tout x dans I, $f(x) \leq M$;
> - f est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que pour tout x dans I, $f(x) \geq m$;
> - f est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
>
> Les nombres M et m sont respectivement un **majorant** et un **minorant** de f.

> **Proposition I.5.** *Une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.*

> **Définition I.7.** Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que
> - f admet un **maximum** sur I s'il existe $a \in I$ tel que pour tout x dans I, $f(x) \leq f(a)$;
> - f admet un **minimum** sur I s'il existe $a \in I$ tel que pour tout x dans I, $f(x) \geq f(a)$.

I.5. Asymptotes et branches infinies

> **Définition I.8.**
> 1. Si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty$, avec $x_0 \neq \pm\infty$, alors la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = x_0$.
> 2. On dit que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote en $\pm\infty$ si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.
>   - Si $a = 0$, on dit que l'asymptote est **horizontale** d'équation $y = b$.
>   - Sinon, l'asymptote est **oblique**.

II. Dérivation

II.1. Dérivée et tangentes

Définition II.1. Soit f une fonction définie sur un voisinage de a. On dit que f est **dérivable en** a si le taux d'acroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$. De plus, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point de coordonnées $(a, f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$.
Si f est dérivable en tout point d'un intervalle ouvert I, alors on dit que f est **dérivable sur** I. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée de** f.

Proposition II.1. *Soit f une fonction définie sur un voisinage de a et dérivable en a. Alors la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $(a, f(a))$ a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.*

II.2. Calculs de dérivées

Voir fiche.
Avant de calculer une dérivée, on s'efforcera de justifier qu'on peut le faire, c'est-à-dire que la fonction est dérivable. Pour cela, on parle d'opérations usuelles sur les fonctions lorsqu'on fait une somme, un produit de fonctions, un quotient de fonctions avec le dénominateur qui ne s'annule pas, une composée lorsque l'image de la première fonction est incluse dans le domaine de définition de la seconde. On utilisera alors la proposition suivante :

Proposition II.2. *Toute fonction définie par des opérations usuelles de fonctions dérivables sur un intervalle I est encore dérivable sur I.*

Exemples II.1.

1. Si f est une fonction dérivable sur I, alors e^f est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^f)' = \mathrm{e}^f \times f'$.
   Par exemple, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto 2x\mathrm{e}^{x^2-1}$.
2. Si f est une fonction dérivable sur I, alors $\cos(f)$ est dérivable sur I et $(\cos f)' = -(\sin f) \times f'$.
   Par exemple, la fonction $x \mapsto \cos(3x+2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto -3\sin(3x+2)$.

III. Bijections

Définition III.1. Une fonction $f : I \to J$ est une **bijection** si pour tout $y \in J$, il existe un unique antécédent $x \in I$ tel que $f(x) = y$.
On note alors $x = f^{-1}(y)$ qui définit une fonction $f^{-1} : J \to I$: c'est la **fonction réciproque** de f.

Remarque III.1. Graphiquement, si on trace une droite à hauteur $y \in J$, alors elle coupe une et une seule fois $\mathscr{C}_f$.

Proposition III.1. *Soit $f : I \to J$ une bijection et f^{-1} sa fonction réciproque.*

1. *Pour tout $x \in I$, $f^{-1}(f(x)) = x$ et pour tout $y \in J$, $f(f^{-1}(y)) = y$.*
2. *La courbe représentative de f^{-1} est symétrique de celle de f par rapport à la droite $y = x$.*

Méthode. Pour inverser une fonction (lorsque c'est possible), on écrit $y = f(x)$ puis on résout l'équation d'inconnue x.

Remarque III.2. On utilise dans le théorème suivant la notion de continuité que l'on ne reverra que plus tard dans l'année. On pourra toutefois se remémorer que :

- les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition ;
- une fonction obtenue par opérations usuelles sur des fonctions continues sur I est encore continue sur I ;
- si f est dérivable sur I alors elle est continue sur I.

On rappelle le théorème suivant.

Théorème III.2 (Théorème de valeurs intermédiaires)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et $a < b$ deux éléments de I. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Théorème III.3 (Bijection monotone)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

- *Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $J = [f(a), f(b)]$.*
- *Si f est strictement décroissante sur $[a, b]$, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $J = [f(b), f(a)]$.*

Dans les deux cas, f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f.
Si de plus f est dérivable sur I et si $y \in J$ est tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y et :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Remarque III.3.

- Si I est ouvert en a (ou en b), l'énoncé est toujours vrai en remplaçant $f(a)$ (ou $f(b)$) par $\lim_{x \to a} f(x)$ (ou $\lim_{x \to b} f(x)$).
- Si $x \in [a, b]$, alors $f'(x)$ et $(f^{-1})'(f(x))$ sont les pentes des tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ aux points $(x, f(x))$ et $(f(x), x)$. D'après la formule pour $(f^{-1})'$, les deux tangentes sont aussi symétriques par rapport à $y = x$.

IV. Fonctions usuelles

IV.1. Puissances

IV.1.1 Puissances entières

Définition IV.1.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on définit $x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}^-$. Pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ on définit $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$.

Remarque IV.1. En particulier, pour $n = 0$, $x^0 = 1$ pour tout réel x.

Proposition IV.1.

1. *Lorsque $n \in \mathbb{Z}$ est pair (resp. impair), la fonction $x \mapsto x^n$ est paire (resp. impaire).*
2. *Lorsque $n \in \mathbb{N}$ (resp. $n \in \mathbb{Z}^-$), la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{R}^*$) et sa dérivée est $x \mapsto nx^{n-1}$.*

IV.1.2 Racines n-ièmes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition IV.2. *La fonction $x \mapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.*

Pour tout $y \geq 0$, la solution de l'équation $x^n = y$ est notée $y^{\frac{1}{n}}$ ou encore $\sqrt[n]{y}$.

Définition IV.2. La fonction réciproque de $x \mapsto x^n$ est la fonction **racine n-ième** notée : $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$.

Remarques IV.2.

1. Pour $n = 2$, on a $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.
2. Lorsque n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc on peut définir $x^{\frac{1}{n}}$ aussi pour $x < 0$.

3. Attention, si n est pair, $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.

Proposition IV.3. *La fonction* $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et sa dérivée est* $x \mapsto \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

IV.2. Logarithme

Définition IV.3. Le **logatithme népérien** est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui s'annule en 1. On le note $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Proposition IV.4.
1. *La fonction* ln *est définie, dérivable et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
2. $\ln(x) = 0 \iff x = 1$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $r \in \mathbb{Q}$,

   (a) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$; *(b)* $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$; *(c)* $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; *(d)* $\ln(x^r) = r\ln(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Proposition IV.5. *Pour tout réel* $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Définition IV.4. Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Le **logarithme en base** a est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log_a : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Proposition IV.6. *Le logarithme en base a vérifie les même propriétés algébrique que le logarithme népérien. De plus, elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Remarque IV.3. Lorsque $a = 10$, on omet en général l'indice 10 : on a donc $\log(10^n) = n$.

IV.3. Exponentielle

Proposition IV.7. *La fonction* ln *réalise une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$.

Définition IV.5. La bijection réciproque du logarithme népérien est la fonction **exponentielle** notée $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

Proposition IV.8.
1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et tout* $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(x) = y \iff x = \ln(y)$.
2. $\exp(0) = 1$.
3. *La fonction* exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est* $x \mapsto \exp(x)$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *et* $r \in \mathbb{Q}$,

   (a) $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$; *(b)* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$; *(c)* $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$; *(d)* $\exp(rx) = (\exp x)^r$.
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

Remarque IV.4. Pour $x = 1$ et $r \in \mathbb{Q}$, on obtient $\exp(r) = \exp(1)^r$. En notant $\mathrm{e} = \exp(1)$, on a donc $\exp(r) = \mathrm{e}^r$. On notera de même pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Proposition IV.9. *Pour tout réel x, $e^x \geq x+1$.*

IV.4. Puissances réelles

Définition IV.6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on définit $x^a = e^{a \ln x}$.

Remarque IV.5.
- lorsque $a \in \mathbb{N}$, cette nouvelle fonction puissance coïncide avec la précédente. De même lorsque $a \in \mathbb{Z}^-$ et $a \in \mathbb{Q}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^0 = 1$ et $x^1 = x$.
- Lorsque cela a un sens, on a les propriétés bien connues des puissances : $x^a y^a = (xy)^a$, $x^a x^b = x^{a+b}$ et $(x^a)^b = x^{ab}$.

Proposition IV.10. *La fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur*
- $\mathbb{R}$ *si* $a \in \mathbb{N}$ *;*
- $\mathbb{R}^*$ *si* $a \in \mathbb{Z}_-^*$ *;*
- $\mathbb{R}_+^*$ *si* $a < 1$ *et* $a \notin \mathbb{Z}$ *;*
- $\mathbb{R}^+$ *si* $a \geq 1$ *et* $a \notin \mathbb{Z}$.

Dans tous les cas sa dérivée est $x \mapsto ax^{a-1}$.

Proposition IV.11.
- *Si $a > 0$, alors $x \mapsto x^a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = +\infty$.*
- *Si $a < 0$, alors $x \mapsto x^a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = 0$.*

On pose donc $0^a = 0$ si $a > 0$.

Proposition IV.12. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$.*
- *Si $x \in]0,1[$, alors $x^a > x^b$.*
- *Si $x \in]1,+\infty[$, alors $x^a < x^b$.*

Remarque IV.6. Si on inverse les rôles de x et a, on obtient pour tout $a > 0$, une fonction $x \mapsto a^x$ définie sur $\mathbb{R}$ qu'on appelle exponentielle en base a et qui est la réciproque du logarithme en base a.

IV.5. Croissances comparées

Proposition IV.13. *Soient α, β, γ trois réels strictement positifs.*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0.$ *2.* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\beta}{e^{\gamma x}} = 0.$ *3.* $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\beta (\ln x)^\alpha = 0.$ *4.* $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\beta e^{\gamma x} = 0.$

Corollaire IV.14. *Soit $\alpha > 0$, $p > 1$ et $q \in]-1,1[$.*

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\alpha}{p^n} = 0.$ *2.* $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha q^n = 0.$

IV.6. Fonctions circulaires réciproques

La fonction $x \mapsto \sin x$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$. En effet, $\sin 0 = \sin \pi$. Cependant, d'après le TBM, elle est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.

Définition IV.7. L'application réciproque de sin est appelée **arcsinus** et notée $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition IV.15.
- *La fonction* arcsin *est strictement croissante et impaire sur* $[-1,1]$.
- *Pour tout* $x \in [-1,1], \sin(\arcsin x) = x$ *et pour tout* $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin\theta) = \theta$.
- *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et pour tout* $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Remarque IV.7. Attention : dans la dernière égalité, il est indispensable que θ se trouve dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

De la même façon, $x \mapsto \cos x$ est bijective de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$.

Définition IV.8. L'application réciproque de cos est appelée **arccosinus** et notée $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.

Proposition IV.16.
- *La fonction* arccos *est strictement décroissante sur* $[-1,1]$.
- *Pour tout* $x \in [-1,1], \cos(\arccos x) = x$ *et pour tout* $\theta \in [0,\pi]$, $\arccos(\cos\theta) = \theta$.
- *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et pour tout* $x \in]-1,1[$,

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Proposition IV.17. *Pour tout* $x \in [-1,1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Enfin, $x \mapsto \tan x$ est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition IV.9. L'application réciproque de tan est appelée **arctangente** et notée $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Proposition IV.18.
- *La fonction* arctan *est strictement croissante et impaire sur* $\mathbb{R}$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x$ *et pour tout* $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan\theta) = \theta$.
- *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Proposition IV.19. *Pour tout* $x > 0$ *(resp.* $x < 0$*)*, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ *(resp.* $-\frac{\pi}{2}$*).*

Proposition IV.20. *Soit* $z = a + ib$ *un nombre complexe.*

1. *Si* $a > 0$, *alors* $\arg(z) \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi]$.
2. *Si* $a < 0$, *alors* $\arg(z) \equiv \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi]$.

IV.7. Fonctions hyperboliques

Définition IV.10.
- On appelle **cosinus hyperbolique** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- On appelle **sinus hyperbolique** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

On les note parfois cosh et sinh.

Proposition IV.21. 1. *La fonction* ch *est paire et la fonction* sh *est impaire.*
2. *Les fonctions* ch *et* sh *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

Remarque IV.8. La courbe d'équation $x^2 - y^2 = 1$ est une hyperbole, raison pour laquelle ces fonctions sont appelées hyperboliques.

Définition IV.11. On appelle **tangente hyperbolique** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$.

Proposition IV.22. 1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \mathrm{th}(x) \leq 1$.
2. *La fonction* th *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$.