Chapitre 4 : Un peu de logique

I. Assertions

Définition I.1. Une assertion est une proposition dépendant éventuellement d'une ou plusieurs variables à laquelle on peut associer le statut VRAI ou FAUX.

Exemples I.1.
- « $3 > 2$ » ...
- « $2^2 < \pi$ » ...
- « $2x + 1 > 3x + 1$ » ...
- « $[AB] = 3$ » ...

L'assertion (NON A) est vraie lorsque A est fausse et (NON A) est fausse lorsque A est vraie. C'est la **négation** de A.

Exemples I.2.
- NON($x > 1$) est $x \leq 1$.
- NON(n est pair) est n est impair.
- NON(f est croissante) est ...

Application I.1. Dire si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse puis en donner la négation :

a) 6 est divisible par 3 :

b) $2 \geq 3$:

c) la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$:

d) tous les parallélogrammes sont des rectangles :

II. Ensembles

Un ensemble est une collection d'éléments qui ont une bonne raison d'être ensemble !
Lorsque x est un élément d'un ensemble E, on note $x \in E$, sinon on note $x \notin E$.
Il y a deux façons de définir un ensemble :

- **En extension** : on fait la liste de tous les éléments de l'ensemble ;
- **En compréhension** : on regroupe tous les éléments x d'un ensemble E qui vérifient certaines contraintes $A(x)$. On note $\{x \in E \mid A(x)\}$.

Remarques II.1.
- L'ensemble $\emptyset$ est l'ensemble vide. Il ne contient aucun élément.
- $\{a\}$ est un ensemble ne contenant qu'un seul élément. On l'appelle un **singleton**.

Exemples II.1.
- L'ensemble J des jours de la semaine s'écrit :
  $J = \{lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche\}$. On a par exemple : $jeudi \in J$.
- L'ensemble C des chiffres s'écrit : $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. On a par exemple $11 \notin C$.
- L'ensemble $W = \{jour \in J \mid jour$ est un jour du week-end$\}$ s'écrit en extension $W = \{samedi, dimanche\}$.
- L'ensemble C s'écrit aussi $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 9\}$.

Application II.1.

1. Écrire les ensembles suivants en compréhension :
   (a) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\} =$
   (b) $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} =$
   (c) $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\} =$
2. Écrire les ensembles suivants en extension :
   (a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x < 4\} =$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} =$
   (c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 20$ et n est divisible par $3\} =$
   (d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 0\} =$

III. Quantificateurs

Soit E un ensemble et $A(x)$ une assertion portant sur $x \in E$.

- **Quantificateur existentiel :** $(\exists x \in E \ / \ A(x))$ est vraie lorsque $A(x)$ est vraie pour au moins un élément de E. On lit : « il existe x appartenant à E tel que $A(x)$ ».

  Exemples III.1. ▷ $\exists x \in \mathbb{R} \ / \ \cos x = 2$ se lit « il existe un réel x tel que son cosinus soit égal à 2 ».

  ▷ « Il existe un entier naturel n tel que $n+1$ soit strictement inférieur à 2 » s'écrit : $\exists n \in \mathbb{N} \ / \ n+1 < 2$.

- **Quantificateur universel :** $(\forall x \in E, A(x))$ est vraie lorsque $A(x)$ est vraie pour tout élément de E. On lit : « pour tout x appartenant à E, $A(x)$ ».

  Exemples III.2. ▷ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1=0$ se lit « pour tout réel x, $x^2+1=0$ ».

  ▷ « Pour tout rationnel r, il existe un entier relatif q tel que rq soit un entier naturel » s'écrit : $\forall r \in \mathbb{Q}, \exists q \in \mathbb{Z} \ / \ rq \in \mathbb{N}$.

- **Règles d'utilisation :**
  1. Toujours préciser l'ensemble E.
  2. Toujours écrire les quantificateurs **AVANT** l'assertion.
  3. L'ordre des quantificateurs est **TRÈS** important.

Exemple III.3. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \ / \ y \geq x^2$ est vraie, par contre, $\exists y \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, y \geq x^2$ est fausse !

Application III.1. Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. Tous les entiers naturels sont positifs :
2. Le carré de tout réel est positif :
3. Il existe un réel dont le carré vaut 8 :
4. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré :
5. L'équation $x^2+x+1=0$ possède au moins une solution réelle :
6. Tout nombre complexe admet une racine carrée :
7. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres :

Proposition III.1.
- $(\text{NON}(\exists x \in E \ / \ A(x))) \iff (\forall x \in E, \text{NON}\, A(x))$
- $(\text{NON}(\forall x \in E, A(x))) \iff (\exists x \in E \ / \ \text{NON}\, A(x))$

Application III.2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier et donner leur négation à chaque fois.

1. Tout triangle rectangle possède un angle droit :
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$:
3. $\exists x \in \mathbb{R} \ / \ \forall y \in \mathbb{R}, xy = 0$:
4. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R} \ / \ x = y^2$:
5. $\exists x \in \mathbb{R}^+ \ / \ \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$:
6. $\exists x \in \mathbb{R} \ / \ \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$:
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$:

III.1. Preuves liées aux quantificateurs

Pour démontrer une assertion $\exists x \in E, A(x)$, il faut construire/trouver un élément x de E tel que $A(x)$ soit VRAI.

Exemple III.4. Montrons que $\exists M \in \mathbb{R} \mid \sin(2) \leq M$ est vraie.

Pour démontrer une assertion $\forall x \in E, A(x)$, on écrit :
« Fixons $x \in E$.
......
Donc $A(x)$ est vraie.
Ainsi $\forall x \in E, A(x)$ est vraie. »

Exemple III.5. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 3 \geq 2$.
Prenons $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 3 \geq 2$.

Remarque III.1. Pour démontrer qu'une assertion $\forall x \in E, A(x)$ est fausse, il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $A(x)$ est fausse. C'est un contre-exemple.

Exemple III.6. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \geq 0$ est fausse car ...

Application III.3. Dans chacun des cas, dire si l'assertion est vraie puis le démontrer :

1. $\exists f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid y \geq x^2$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2$

4. Il existe un entier naturel plus grand que tous les autres.

IV. Récurrence

On dispose d'une propriété $\mathscr{P}(n)$ qui dépend d'un paramètre entier n. On souhaite démontrer qu'elle est vraie, et ce quelle que soit la valeur de l'entier n.

Exemple IV.1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + n - 2$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n) : u_n \geq 0$.
Si on calcule les premiers termes de la suite, on obtient :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = \quad , \quad u_2 = \quad , \quad u_3 = \quad , \quad u_4 = \quad , \ldots$$

La propriété $\mathscr{P}(n)$ semble vraie pour tout n. Pour le démontrer, on utilise le principe de récurrence.

Théorème IV.1 (Principe de récurrence)

Soit n_0 un entier naturel donné.
Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété qui dépend d'un paramètre $n \geq n_0$. Supposons que :

- *$\mathscr{P}(n_0)$ est vraie et*
- *pour tout entier $k \geq n_0$, si $\mathscr{P}(k)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.*

Alors la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Ainsi, pour démontrer que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pout tout $n \in \mathbb{N}$ dans notre exemple IV.1, il nous suffit de vérifier que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Méthode. ♡ **Rédaction type :**
« Montrons par récurrence sur $n \geq n_0$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- **Initialisation :** pour $n = n_0$, on vérifie que $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $k \geq n_0$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
  On a alors ...
  Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. »

Exemple IV.2. Reprenons l'exemple IV.1.
Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que la propriété $\mathscr{P}(n) : u_n \geq 0$ est vraie.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie car
  Pour $n = 1$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie car
  Pour $n = 2$, $\mathscr{P}(2)$ est vraie car
- **Hérédité :** Soit $k \geq 2$. Supposons que $u_k \geq 0$ et montrons que $u_{k+1} \geq 0$.

D'après le principe de récurrence, on a bien $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque IV.1.

- Si la preuve de l'hérédité ne fonctionne qu'à partir d'un certain n_1, il faut vérifier que les propriétés $\mathscr{P}(n_0), \ldots, \mathscr{P}(n_1)$ sont vraies pour l'initialisation.
- Il est indispensable de faire l'initialisation **et** l'hérédité.

Exemple IV.3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
En calculant ses premiers termes, on trouve :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 3, \quad u_2 = \qquad , \quad u_3 = \qquad , \quad u_4 = \qquad , \ldots$$

On pourrait donc essayer de démontrer que la propriété $\mathscr{P}(n)$: est vraie pour tout entier n.
Comme la relation qui définit la suite (u_n) fait intervenir u_n, u_{n+1} et u_{n+2}, on a besoin du principe de récurrence double.

Corollaire IV.2 (Principe de récurrence double). *Soit n_0 un entier naturel donné.*
Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété qui dépend d'un paramètre $n \geq n_0$. Supposons que :

- *$\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$ sont vraie et*
- *pour tout entier $k \geq n_0$: si $\mathscr{P}(k)$ et $\mathscr{P}(k+1)$ sont vraies, alors $\mathscr{P}(k+2)$ est vraie.*

Alors la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple IV.4. Reprenons l'exemple IV.3. Montrons par récurrence double sur n que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

- **Initialisation :** $\mathscr{P}(0)$ est vraie car
  $\mathscr{P}(1)$ est vraie car
- **Hérédité :** Soit $k \geq 1$. Supposons que $u_k =$ et $u_{k+1} =$ et montrons que $u_{k+2} =$

  Donc $\mathscr{P}(k+2)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, la résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition IV.1.

- Soit q un nombre réel. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique de raison** q si pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} =$ ....
- Soit r un nombre réel. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique de raison** r si pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} =$ ....

Proposition IV.3.
1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors, pour tout entier $n \geq 0$,* $\boxed{u_n = \qquad\qquad}$.
2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout entier $n \geq 0$,* $\boxed{u_n = \qquad\qquad}$.

Démonstration. *On démontre ces deux formules par récurrence.*

1. *Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que*
   - ***Initialisation :***
   - ***Hérédité :***

   D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 0$,
2. *Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que*
   - ***Initialisation :***
   - ***Hérédité :***

   D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 0$, □

On dispose d'un principe de récurrence forte lorsqu'on a besoin de savoir que $\mathscr{P}(n_0), \mathscr{P}(n_0+1), \ldots, \mathscr{P}(k)$ sont vraie pour montrer que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Corollaire IV.4 (Principe de récurrence forte). *Soit n_0 un entier naturel donné.*
Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété qui dépend d'un paramètre $n \geq n_0$. Supposons que :
- *$\mathscr{P}(n_0)$ est vraie et*
- *pour tout entier $k \geq n_0$, si $\mathscr{P}(n_0), \mathscr{P}(n_0+1), \ldots, \mathscr{P}(k)$ sont vraies, alors $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.*

Alors la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.